



GIULIANO RODRIGUES TONIOLO

**DUALIZAÇÃO DE NOETHER DE
UMA EXTENSÃO DA
ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COM
VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE
LORENTZ**

LAVRAS – MG

2015

GIULIANO RODRIGUES TONIOLO

**DUALIZAÇÃO DE NOETHER DE UMA EXTENSÃO DA
ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COM VIOLAÇÃO DA
SIMETRIA DE LORENTZ**

Dissertação apresentada à Universidade Federal
de Lavras, como parte das exigências do
Programa de Pós-Graduação em Física, área de
concentração em Física de Partículas e Campos,
para a obtenção do título de Mestre

Orientador

Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito

Co-Orientador

Prof. Dr. Helvécio G. Fagnoli Filho

LAVRAS – MG

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Toniolo, Giuliano Rodrigues.

Dualização de *Noether* de uma Extensão da Eletrodinâmica
Quântica com Violação da Simetria de Lorentz / Giuliano
Rodrigues Toniolo. – Lavras : UFLA, 2016.
80 p.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de
Lavras, 2015.

Orientador(a): Luiz Cléber Tavares de Brito.
Bibliografia.

1. Ciências Exatas. 2. Dualização de Noether. 3. Seção de
Choque. 4. Simetria de Gauge. 5. Quebra de simetria. I.
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

GIULIANO RODRIGUES TONIOLO

**DUALIZAÇÃO DE NOETHER DE UMA EXTENSÃO DA
ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COM VIOLAÇÃO DA
SIMETRIA DE LORENTZ**

Dissertação apresentada à Universidade Federal
de Lavras, como parte das exigências do
Programa de Pós-Graduação em Física, área de
concentração em Física de Partículas e Campos,
para a obtenção do título de Mestre

APROVADA em 17 de Dezembro de 2015.

Prof. Luiz Cleber Tavares de Brito	UFLA
Prof. Helvécio Geovani Fagnoli Filho	UFLA
Prof. Saulo Henrique Pereira	UFLA
Prof. Moises Porfírio Rojas Leyva	UFLA

Prof. Dr. Luiz Cleber Tavares de Brito
(Orientador)

Prof. Dr. Helvécio G. Fagnoli Filho
(Co-Orientador)

LAVRAS – MG

2015

Dedico esta dissertação a todos os estudantes que, por vontade de aprender, buscarão a física para sanar e engrandecer sua inesgotável curiosidade e vontade do saber.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a minha família, minha mãe Ladi Rodrigues Toniolo, ao meu pai Gilberto Bordin Toniolo e aos meus irmãos Gustavo e Giovana, por tudo que me ensinaram e me ajudaram a construir até hoje. Agradeço a minha vó Anita, os meus primos e demais familiares que me apoiaram. Agradeço ao Prof. Luiz Cleber T. de Brito, Prof. Helvécio Geovani Fagnoli F. e o Prof. Jean Carlos C. Felipe, que me ajudaram durante todo curso e com quem tive a grande oportunidade de trabalhar. Agradeço a todos meus amigos. O primeiros deles são meu irmão gêmeo Gustavo R. Toniolo e minha irmã, amigos mais influentes na minha formação pessoal. Ao Hélio Perottoni, Alan Mateus Padilha, André Luiz Rosa de Freitas, Matheus Lima, Diego S. Starke Chrysostemos e Barbara Konrad por grandes batalhas vencidas na graduação e grande amizade, aprendendo Go, física, matemática, música, a fazer pizzas, assombrar prédios escuros e muito mais. A Luciana Ebani e Thalís José Girardi por suas companhias constantes e amizade, tanto na graduação como também na pós graduação, sempre me ajudando a resolver problemas de física difíceis e, claro, fazer super combos-lanches. Aos meus amigos a distância Eliana Hilgert, Josemar Wiethan Cattelan e Vinícius de Medeiros da Rosa, que se mantiveram presentes, com suas palavras, mesmo estando longe. Ao Prof. Augusto Mario Goulart P., a Louisie Milani e a Adriana Eliser pelos suas ajudas e seus excelentes trabalhos. Aos grandes amigos que fiz no mestrado, Felipe Rodrigues da Cruz, Felipe Fortes Braz, Fauzy Traboussy, Yuri Ximenes, Marcio Silva, Diêgo Silva Santos, João Marcelo Garcia, Isaac Martins, Ana Sonvesso e

Bruno Marques, pelas grandes aprendizagens, pelos treinos físicos difíceis. Amigos que me mostraram que sempre é possível se melhorar a cada dia, ensinamentos que levarei para a vida. E a amiga Isabela Copetti, que em breve será minha nova professora de arte.

Todas as coisas são precedidas pela mente, guiadas pela mente. Tudo o que somos hoje é resultado do que temos pensado. O que pensamos hoje é o que seremos amanhã; nossa vida é uma criação da nossa mente. Se um homem fala ou age com uma mente impura, o sofrimento o acompanha tão de perto como a roda segue a pata do boi que puxa o carro.

YAMAKAVAGGA, Versos Gêmeos

RESUMO

Nesta dissertação estudamos os fundamentos da teoria quântica de campos e, com esta base, investigamos uma extensão da Eletrodinâmica Quântica em que a simetria de Lorentz e de calibre são explicitamente quebradas. A violação da simetria de Lorentz é implementada por anisotropias do espaço-tempo introduzidas por tensores constantes, enquanto a violação da simetria de calibre é realizada pela introdução de termos de massa para o fóton. Nesta extensão do Modelo Padrão nos utilizamos do Método de Dualização de Noether para recuperar a simetria de calibre. Neste trabalho mostramos que a teoria dualizada é uma formulação fisicamente equivalente ao modelo original sem a simetria de calibre, as grandezas físicas calculadas a partir desses dois modelos devem produzir os mesmos resultados. Desta forma escolhemos uma grandeza física no qual exploramos esta equivalência: a seção de choque de um espalhamento Möller.

Palavras-Chave: Ciências Exatas; Dualização de Noether; Seção de Choque ; Simetria de gauge; quebra de simetria.

ABSTRACT

In this work we studied the fundamentals of quantum field theory and, on this basis, we investigate an extension of Quantum Electrodynamics with Lorentz and gauge symmetry explicitly broken. The Lorentz symmetry violation is implemented by space-time anisotropy introduced by a constant tensor, while the violation of Gauge symmetry is achieved by the introduction of mass terms for photon . In this extension of the Standard Model we use the Noether dualization method to recover the gauge symmetry . We show that the dualized theory is a physically equivalent formulation to the original model without the gauge symmetry. The physical quantities calculated from these two models should produce the same results. Thus, we chose a physical quantity in which we explore this equivalence: the cross section of a Möller scattering.

Keywords: Exact Sciences; Noether Dualization; Cross Section; Gauge broken Symmetry.

SUMÁRIO

1	Introdução	12
2	Elementos da Teoria Quântica de Campos	16
2.1	O campo de Dirac	16
2.2	O campo eletromagnético	21
2.3	A eletrodinâmica quântica	23
2.4	Processos de espalhamento	26
3	Método de Dualização de Noether	34
3.1	Introdução	34
3.2	Exemplo de aplicação do MDN	35
3.3	Dualização de um Modelo com Quebra da Simetria de Lorentz	37
3.4	Propagadores	42
4	Seção de Choque elétron-elétron no Modelo com Violação de Lorentz	45
4.1	Introdução	45
4.2	Cálculo da Seção de Choque: Lagrangiana 4.1	46
4.3	Cálculo da Seção de Choque: Lagrangiana Dual	49
5	Conclusão e Perspectivas	53
A	Cálculo do Propagador do Fóton na QED	58
B	Seção de Choque	60
C	Cálculo da Amplitude	66
D	Produtos de Momentos	73
E	Operadores de Projeção	75

1 INTRODUÇÃO

Uma das maiores conquistas da física foi o desenvolvimento de uma teoria unificada que engloba as interações eletromagnética, fraca e forte em uma única teoria, constituindo o chamado Modelo Padrão (MP)(NOVAES, 1999). A interação gravitacional não faz parte do modelo.

Os fundamentos do MP começaram a se consolidar no início dos anos sessenta quando Salam e Ward propõem uma teoria para descrever as interações forte e fraca por meio de transformações de calibre generalizadas (SALAM; WARD, Set. 1961). No mesmo ano Glashow cria uma descrição para as interações entre as partículas por meio de bósons vetoriais Z^0 e W^\pm , ou seja, agora estas interações se dão por partículas mediadoras de forças. Poucos anos mais tarde os mesmos Salam, Glashow e Weinberg estimam a massa do W e Z por meio da construção da lagrangiana do setor eletrofraco (SALAM; WARD, Nov. 1964; CHRISTENSON et al., Jul.1964). Consolidava-se uma das principais áreas de estudo da física de partículas. A teoria eletrofraca possui grande poder de predição que foram testadas com sucesso em 1982, quando se obteve a primeira medição dos bósons W e Z . Mais recentemente, as colaborações CMS e ATLAS (AAD et al., Sept.2012; NICOLAIDOU; SIROIS, 2015), do CERN, anunciaram a descoberta de uma nova partícula, identificada com o Bóson de Higgs predito pelo modelo na década de 60 (HIGGS, May. 1966; HIGGS, Oct. 1964) até o presente momento (BERINGER et al., july 2012).

Na construção do modelo descrito acima, as simetrias desempenharam um papel fundamental (KOSTELECKY, 1998). Entre as mais importantes encontram-se as simetrias associadas à invariância das leis frente a transformações de Lorentz próprias, que englobam rotações, translações e *boosts* (BELICH et al., 2007), e as simetrias internas associadas às transformações de calibre (KOSTELECKY, 1998). Além das simetrias de Lorentz

e de calibre, desempenham um papel relevante na física as chamadas simetrias discretas C, P e T, que representam, respectivamente, as operações de conjugação da carga, transformação de paridade e inversão temporal. Toda teoria quântica de campos relativística é invariante pela transformação combinada CPT (STREATER,). As simetrias de Lorentz, de calibre e CPT fazem parte do Modelo Padrão.

Apesar de seu grande poder preditivo, o MP não é uma teoria completa. Como exemplo disso, o modelo padrão não incorpora o fato de que os neutrinos ν_e , ν_μ e ν_τ possuem massa, conforme descoberto por Arthur B. McDonald e Takaaki Kajita. Assim existe um consenso de que o MP necessita de algum tipo de extensão (KOSTELECKY; RUSSELL, 2011). Atualmente existe um grande campo de pesquisa que trata da construção de algum tipo de generalização (ELLIS, 2002).

Em um panorama geral, o presente trabalho contextualiza-se em uma proposta de extensão do MP de Colladay e Kostelecky, o Modelo Padrão Extendido (MPE - conhecido na literatura da área como *Standard Model Extension*, ou simplesmente SME) (COLLADAY; KOSTELECKY, July 1997; COLLADAY; KOSTELECKY, Oct.1998). O MPE caracteriza-se por uma violação da simetria de Lorentz no sentido de que o modelo possui tensores constantes que privilegiam direções no espaço-tempo. Embora a covariância por transformações de Lorentz entre referenciais inerciais seja mantida, a anisotropia introduzida pelos tensores constantes conduz a predições que podem ser testadas experimentalmente. Realmente, um grande número de experimentos vem buscando desvios preditos pelo MPE (KOSTELECKY; RUSSELL, 2011), o que representaria uma violação da Teoria da Relatividade, em que o espaço-tempo é isotrópico e as leis, portanto, não possuem tensores constantes.

Recentemente, Donoghue e El-Menoufi (DONOGHUE et al., 2010) sugeriram que violações da simetria de Lorentz como as que ocorrem no MPE podem induzir violações da simetria de calibre, outra simetria do MP mantida no MPE. Os autores fizeram uma análise fenomenológica do espalhamento fóton-fóton introduzindo termos na ação que violam a simetria de calibre. Independentemente, Brito, Scarpelli e Fargnoli investigaram as modificações quânticas na eletrodinâmica escalar com simetria de gauge espontaneamente quebrada, modificando o setor do fóton da teoria livre com o termo CPT-ímpar proposto originalmente por Carrol, Field e Jackiw (CARROLL et al., Feb.1990). Como resultado, obtiveram que em um laço, além dos termos de massa como os que foram considerado em (ANBER et al., July 2009; EL-MENOUFI; DONOGHUE, 2013), o setor do fóton é modificado pela indução de um termo CPT-par (BRITO et al., June 2013).

Motivados pelos resultados preliminares que obtiveram em (FARGNOLI et al., Oct. 2014), esses autores estudaram uma generalização do modelo de Procca com a simetria de calibre do campo vetorial A^μ violada por termos tipo massa e um termo CPT-par presente no setor do fóton do MPE. A lagrangiana do modelo é dada por¹

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(b_\mu F^{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}A_\mu h^{\mu\nu}A_\nu \quad (1.1)$$

onde $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu$, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, e m um parâmetro com dimensão de massa. O objetivo do trabalho foi obter o dual do modelo definido pela lagrangiana acima através do Método de Dualização de Noether e estudar sua equivalência no nível do espectro de autovalores dos propagadores da teoria livre (FARGNOLI et al., Oct. 2014). Com essa análise, pode-se

¹A métrica adotada ao longo do trabalho é $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$. Estamos adotando o sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$.

verificar que pelo menos no que concerne a teoria livre, os modelos não são fisicamente equivalentes.

Neste trabalho abordaremos uma extensão do modelo 1.1, exposto em (FARGNOLI et al., Oct. 2014) com o objetivo específico de avaliar a equivalência entre o modelo 1.1 e seu dual, porém com o acoplamento do campo de calibre A^μ com a matéria fermiônica. Mais especificamente, a finalidade do projeto é avaliar a equivalência física entre uma extensão da Eletrodinâmica Quântica, estendida com violação da simetria de calibre, com o modelo dual obtido via Método de Dualização de Noether. A principal contribuição do trabalho será avaliar tal equivalência através do cálculo da seção de choque do espalhamento elétron-elétron (espalhamento Möller) nos dois modelos.

2 ELEMENTOS DA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Antes de abordarmos os tópicos específicos deste trabalho, faremos uma breve apresentação dos elementos essenciais da formulação canônica da Teoria Quântica de Campos. Essas são as bases teóricas sobre as quais está fundamentada nossa investigação.

2.1 O campo de Dirac

Na teoria clássica de campos a descrição canônica de férmions é dada em termos de um campo ψ satisfazendo a equação de Dirac

$$(i\cancel{\partial} - M)\psi = 0, \quad (2.1)$$

em que $\cancel{\partial}^1$ é a derivada parcial e M é a massa do férmion vezes a matriz identidade. A equação de Dirac pode ser obtida de um princípio variacional partindo da ação

$$S_{dirac} = \int d^4x \mathcal{L}_{dirac}, \quad (2.2)$$

em que a densidade de lagrangiana \mathcal{L}_{dirac} é dada por

$$\mathcal{L}_{dirac} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - M \bar{\psi} \psi, \quad (2.3)$$

que após integração por partes pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{dirac} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi. \quad (2.4)$$

¹Utilizaremos a notação $\cancel{\partial} = a^\mu \gamma_\mu$, sendo γ_μ , com $\mu = 0, 1, 2, 3$, as matrizes de Dirac. A representação das matrizes de Dirac utilizadas no trabalho assim como detalhes de toda a discussão desenvolvida nessa seção podem ser encontrados na referência (GOMES, 2015).

A equação 2.1 é uma equação matricial. Portanto uma solução ψ é composta de 4 componentes. Uma solução de onda plana da equação de Dirac deve ser escrita como ²

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx} + v(p)e^{ipx}, \quad (2.5)$$

em que $px = p^\mu x_\mu = p^0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$ com $p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$. De 2.1, segue que

$$(\not{p} - M)u(p) = 0 \quad (2.6)$$

$$(\not{p} + M)v(p) = 0. \quad (2.7)$$

No referencial de repouso ($\vec{p} = 0$ e $p^0 = M$) as equações acima tornam-se

$$(\gamma^0 - I)u(0) = 0 \quad (2.8)$$

$$(\gamma^0 + I)v(0) = 0, \quad (2.9)$$

em que I representa a matriz identidade 4×4 e $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}$, com

$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De refreq:refrepU(p) e 2.9 conclui-se que $u(0)$ e $v(0)$ são autovetores de γ^0 com autovalores 1 e -1 , respectivamente. Seguindo a

convenção adotada em (GOMES, 2015), as soluções 2.8 e 2.9 podem ser construídas como autovetores do operador correspondente à componente S_z

²Os dois termos com $u(p)$ e $v(p)$ devem aparecer em 2.5. De fato, a existência de solução diferente da trivial exige que o operador $(\not{p} - M)$ seja singular, ou seja, possua determinante igual a zero. Daí segue que a componente p^0 em uma solução genérica da forma $\psi(x) = w(p)e^{-ipx}$ admite os dois sinais $p^0 = \pm E_p$. Assim, o primeiro termo em 2.5 corresponde a $w(p) \rightarrow u(p)$ da possibilidade $p^0 = +E_p$, enquanto o segundo termo com $w(p) \rightarrow v(p)$ correspondente a $p^0 \rightarrow -E_p$.

do spin. Com isso temos as soluções ³

$$u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

para soluções associadas a $+E_p$, enquanto as soluções correspondentes a $-E_p$ podem ser escritas como

$$v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Portanto, $u^{(1)}$ e $v^{(2)}$ correspondem a soluções com componente z do spin $\frac{\hbar}{2}$, enquanto $u^{(2)}$ e $v^{(1)}$ com componente z do spin $-\frac{\hbar}{2}$. Por uma transformação de Lorentz (boost) do referencial de repouso para um referencial com velocidade $\vec{v} = \vec{p}/p^0$ encontra-se a expressão explícita das soluções $u^{(r)}(p)$ e $v^{(r)}(p)$, com $r = 1, 2$ (GOMES, 2015). Seguem daí as identidades

$$\bar{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p) = \bar{u}^{(r)}(0)u^{(s)}(0) = \delta_{rs} \quad (2.12)$$

$$\bar{v}^{(r)}(p)v^{(s)}(p) = \bar{v}^{(r)}(0)v^{(s)}(0) = -\delta_{rs} \quad (2.13)$$

³Matrizes tipo coluna da forma $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$, com componentes constantes a , b , c e d , possuem autovalores $+1$ e -1 respectivamente, portanto são soluções de 2.8 e 2.9. As componentes são fixadas por condições de normalização. Dado que o operador correspondente a componente S_z do spin é definido por $S_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$, em que $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\bar{v}^{(r)}(p)\gamma^0 u^{(s)}(-p) = \bar{u}^{(r)}(p)\gamma^0 v^{(s)}(-p) = 0. \quad (2.14)$$

em que δ_{rs} é a delta de Kronecker.

De posse das soluções de onda plana, uma solução geral da equação de Dirac é dada por uma superposição na variável contínua \vec{p} :

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{E_p/M} \left[a^{(r)}(p) \psi_u^{(r)}(x) + b^{(r)*}(p) \psi_v^{(r)}(x) \right]. \quad (2.15)$$

Na expressão acima $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$; o fator E_p/M fornece uma medida de integração invariante de Lorentz dada por $\frac{d^3p}{E_p/M}$. Os coeficientes $a^{(r)}(p)$ e $b^{(r)}(p)$ são dados por

$$a^{(r)}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{ipx} \bar{u}^{(r)}(p) \gamma^0 \psi(x) \quad (2.16)$$

e

$$b^{(r)}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{ipx} \bar{\psi}(x) \gamma^0 v^{(r)}(p) \quad (2.17)$$

As últimas expressões podem ser obtidas invertendo 2.15 pelo uso das identidades 2.12, 2.13 e 2.14.

Um teorema geral da Teoria Quântica de Campos livres, o Teorema Spin-Estatística, implica que a quantização canônica de campos com spin 1/2 deve ser feita com regras de anticomutação em tempos iguais:

$$\left\{ \psi_\alpha(\vec{x}, x^0), \psi_\beta(\vec{y}, y^0) \right\}_{x^0=y^0} = \left\{ \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, x^0), \psi_\beta^\dagger(\vec{y}, y^0) \right\}_{x^0=y^0} = 0 \quad (2.18)$$

e

$$\left\{ \psi_\alpha(\vec{x}, x^0), \psi_\beta^\dagger(\vec{y}, y^0) \right\}_{x^0=y^0} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.19)$$

em que $\delta(\vec{x} - \vec{y})$ é a delta de Dirac e os índices $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ representam

as componentes de $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$.

Promovendo $\psi(x)$ em 2.15 a um operador de campo satisfazendo as regras de anticomutação 2.18 e 2.19 resulta que os únicos anticomutadores não nulos dos operadores $a^{(r)}(p)$ e $b^{(r)}(p)$ são

$$\{a^{(r)}(p), a^{\dagger(s)}(p')\} = \{b^{(r)}(p), b^{\dagger(s)}(p')\} = \delta_{rs} \frac{E_p}{M} \delta(\vec{p} - \vec{p}').$$

Postulando a existência de um estado $|0\rangle$ tal que

$$a^{(r)}(p) |0\rangle = b^{(r)}(p) |0\rangle = 0$$

é possível construir estados

$$|p, r\rangle = a^{\dagger(r)}(p) |0\rangle \quad (2.20)$$

$$|k, s\rangle = b^{\dagger(s)}(k) |0\rangle, \quad (2.21)$$

que são interpretados naturalmente como estados de uma partícula e uma antipartícula. De fato, um cálculo explícito mostra que além de serem autovetores dos operadores de momento e energia, os estados também são autoestados do operador de carga: +1 para os estados $|p, r\rangle$ e -1 para $|k, s\rangle$. Além disso, no referencial de repouso, são autovetores do operador correspondente a componente z do spin: $+1/2$ para $r = s = 1$ e $-1/2$ para $r = s = 2$. Nesse sentido, os diferentes valores dos índices r e s correspondem a diferentes polarizações do elétron. Estados de multipartículas são criados

da forma usual pela aplicação de operadores $a^{\dagger(r)}$ e $b^{\dagger(r)}$ no estado de vácuo. O espaço de Fock gerado possui estatística fermiônica.

2.2 O campo eletromagnético

As equações clássicas do eletromagnetismo, as equações de Maxwell, são obtidas mediante um princípio variacional a partir da ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{maxwell}, \quad (2.22)$$

em que

$$\mathcal{L}_{maxwell} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

com $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ definindo o tensor do campo eletromagnético e $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ a representação covariante do potencial eletromagnético. A ação 2.22 reproduz as equações covariantes do eletromagnetismo na ausência de fontes:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

correspondente a $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ e $\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$. As demais equações, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ e $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, seguem diretamente da identidade

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0.$$

Além da covariância de Lorentz, as equações de maxwell possuem a simetria associada a mudanças da forma

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda \quad (2.24)$$

no potencial vetor; Λ é uma função real das coordenadas do espaço tempo. Assim duas soluções diferindo pelo quadrigradiente de uma função são fisi-

camente equivalentes. Classicamente, a ambiguidade pode ser fixada *calibrando* as soluções. A escolha do calibre é arbitrária.

Em uma descrição covariante é conveniente calibrar A^μ de modo que seja satisfeita a condição de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.25)$$

Nesse calibre as componentes do potencial vetor satisfazem

$$\square A^\nu = 0$$

A quantização de uma teoria de campos com simetria de calibre não é simples se comparada com a quantização dos campos bosônicos e fermiônicos. No caso do campo de Maxwell é possível implementar a quantização canônica mediante um procedimento desenvolvido por Gupta-Bleuler⁴. O método permite construir um espaço de Fock no qual as equações de Maxwell são automaticamente satisfeitas, ou seja, o campo eletromagnético quantizado possui o número de graus de liberdade correto (somente modos transversais). Na quantização de Gupta-Bleuler a densidade de lagrangiana clássica 2.23 é substituída por

$$\mathcal{L}_{calibre} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.26)$$

em que λ é um parâmetro constante fixador de calibre. Obviamente, o parâmetro λ não deve contribuir para o setor físico da teoria. Note que, pela equação 2.26, a condição de Lorentz não é implementada no nível clássico. Detalhes sobre a quantização do campo de Maxwell via Gupta-

⁴A generalização da teoria de calibre de Maxwell é a Teoria de Yang-Mills. A simetria de calibre nesse caso é mais complexa e a quantização em geral faz uso de integrais de trajetória e o método de quantização desenvolvido por Faddeev-Popov.

Bleuler podem ser encontrados nas referências (GOMES, 2015; GREINER, 2004; MANDL F., 2010).

Não entraremos em maiores detalhes sobre a quantização do campo de Maxwell, uma vez que no que segue precisaremos somente do propagador da teoria clássica correspondente. O cálculo detalhado do propagador encontra-se no Apêndice 1.

2.3 A eletrodinâmica quântica

Finalizando essa seção sobre a fundamentação teórica do presente projeto de mestrado, apresentamos os elementos que compõe a eletrodinâmica quântica, mencionada no que segue pela sigla utilizada na literatura técnica, a QED.

A QED é a teoria quântica de campos que descreve a interação de léptons - elétrons, múons e taus e seus respectivos neutrinos ⁵- com o campo eletromagnético. O acoplamento entre os campos dá-se por meio de uma quadricorrente $j^\mu = (\rho, \vec{j})$, em que ρ e \vec{j} são a densidade de carga e de corrente, respectivamente. No formalismo lagrangiano tem-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.27)$$

em que o termo linear em A^μ representa o acoplamento.

De um ponto de vista moderno, a simetria de calibre original do eletromagnetismo determina a forma de j^μ e, portanto, a dinâmica das interação entre o campo de Dirac e o campo eletromagnético na QED. Na prática, isso é feito por meio da prescrição

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2.28)$$

⁵De fato, a natureza dos neutrinos como partículas de Dirac ou de Majorana é um problema experimental em aberto. (LANGACKER, 2009)

em que D_μ é a derivada covariante e 2.24 é satisfeita; e é um parâmetro adimensional que desempenha o papel de constante de acoplamento entre o campo eletromagnético e a matéria fermiônica.

Pela substituição de 2.28 em 2.4 e adicionando o setor do campo eletromagnético dado por 2.26 obtemos a lagrangiana da QED

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &\quad + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Comparando 2.29 com 2.27 conclui-se que $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. O princípio geral subjacente ao procedimento que substitui a derivada ordinária pela derivada covariante definida em 2.28 (denominado acoplamento mínimo) é o de que a teoria de campos interagentes é uma teoria invariante por uma transformação de calibre local⁶

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi(x).\tag{2.30}$$

Dado que o campo A^μ transforma-se como 2.24, segue que a lagrangiana 2.29 é invariante por 2.30 uma vez que

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}D_\mu\psi(x).\tag{2.31}$$

No que segue estamos interessados em cálculos perturbativos na constante de acoplamento e . De fato, as predições quantitativas do modelo padrão em termos de observáveis físicos são de natureza perturbativa. As técnicas perturbativas disseminadas em teorias de campos utilizam diagramas de Feynmas como ferramentas de cálculos. O método consiste em

⁶Na QED a transformação é U(1), ou seja, abeliana. A prescrição da derivada covariante pode ser generalizada para simetrias de gauge não abelianas.

construir as amplitudes de transição, os elementos da matriz S , a partir de um conjunto de regras definidas diretamente da lagrangiana do modelo. A técnica foi inventada por Feynman e é descrita em todo livro texto básico de Teoria Quântica de Campos. No caso da QED, descrita pela lagrangiana 2.29, as regras de Feynman estão representadas nos diagramas a seguir:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} \leftrightarrow \frac{i}{p_\mu \gamma^\mu - M + i\epsilon}$$

Figura 2.1: Propagador fermiônico $\Delta_{\mu\nu}(\vec{p})$, teoria livre

$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ k \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} \leftrightarrow -i \left[\frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} + \frac{(\zeta - 1)}{\zeta} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + i\epsilon)^2} \right]$$

Figura 2.2: Propagador do fóton livre.

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \mu \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{~~~~~} \end{array} \leftrightarrow -ie\gamma^\mu$$

Figura 2.3: Vértice da QED.

onde o primeiro gráfico é o propagador do campo ψ , o segundo é o propagador do campos A^μ e por último o vértice de interação da teoria, deduzido do termo $eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$.

2.4 Processos de espalhamento

De um modo geral, os observáveis mensuráveis a partir dos dados coletados em de aceleradores de partículas são seções de choque e tempos de decaimento. Esses observáveis podem ser calculados através de uma teoria quântica de campos relativística a partir das amplitudes de probabilidade da ocorrência de um determinado evento. O conjunto de todas as amplitudes possíveis recebe o nome de matriz de espalhamento, ou simplesmente matriz S .

Os elementos da matriz S podem ser obtidos formalmente mediante o formalismo desenvolvido por Lehman, Symanzik e Zimmermann (formalismo LSZ). Não entraremos nos detalhes formais do método LSZ, mas pode-se dizer em resumo que está baseado na existência de estados assintóticos de partículas livres $|\alpha\rangle^i$ (para $t \rightarrow -\infty$, $i =$ inicial) e $|\beta\rangle^f$ (para $t \rightarrow +\infty$, $f =$ final), em que α e β representam estados de multipartículas, e na completude dos estados finais e iniciais

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = I \quad (2.32)$$

$$\sum_{\beta} |\beta\rangle\langle\beta| = I. \quad (2.33)$$

Segue daí que a matriz S , com elementos dados pelas amplitudes $S_{\alpha\beta} = {}^f\langle\beta|\alpha\rangle^i$, é unitária: $SS^\dagger = S^\dagger S = I$.

Os elementos da matriz S são calculados através das fórmulas de redução. Nesse trabalho estamos interessados no espalhamento Möller entre

dois elétrons. O elemento correspondente da matriz S é obtido a partir dos seguintes estados assintóticos:⁷

- estado inicial ($t \rightarrow -\infty$) de dois elétrons livres com momentos p_1 e p_2

$$|\alpha\rangle = a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2)|0\rangle \quad (2.34)$$

- estado final ($t \rightarrow +\infty$) de dois elétrons com momentos p'_1 e p'_2

$$|\beta\rangle = a^\dagger(p'_1)a^\dagger(p'_2)|0\rangle. \quad (2.35)$$

O elemento da matriz $S_{\alpha\beta}$ é obtido de

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle 0|a(p'_2)a(p'_1)a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2)|0\rangle. \quad (2.36)$$

A construção e justificativa técnica dos objetos matemáticos envolvidos em uma teoria quântica de campos com interações, como a existência do estado estado de vácuo, dos operadores $a^\dagger(p'_1)$, estão além do objetivo do presente projeto de mestrado. Detalhes poderão ser encontrados, por exemplo, nas referências (GOMES, 2015; PESKIN; SCHROEDER, 1995; SREDNICKI, 2007). Do ponto de vista heurístico, o formalismo LSZ reduz o cálculo da matriz S ao cálculo das funções de Green ordenadas no tempo da teoria, que por sua vez podem ser escritas como uma soma de diagramas de Feynman. Para o espalhamento elétron-elétron, a fórmula de redução correspondente está relacionada com a função de Green de dois pontos

$$\langle 0|T\left(\psi(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(y_1)\bar{\psi}(y_2)\right)|0\rangle, \quad (2.37)$$

⁷As polarizações são consideradas iguais e omitidas na etapa inicial do cálculo. Serão levadas em conta posteriormente.

em que o símbolo $T(\dots)$ representa a operação de ordenação temporal. Quando na fórmula de redução, cada campo em 2.37 provém de um dos operadores de criação e aniquilação em 2.36, e portanto correspondem às partículas incidentes e emergentes do espalhamento.

Contudo, antes de escrever explicitamente o elemento da matriz S , deve-se definir a ordem de perturbação em que os cálculos serão implementados. No presente trabalho nos concentraremos nas contribuições dominantes para espalhamento Möller, dadas pelos diagramas de Feynman exibidos nas figuras abaixo

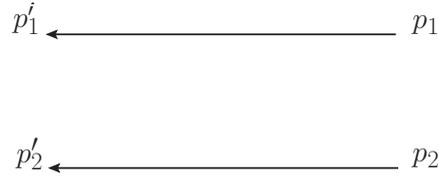


Figura 2.4: Seção trivial do espalhamento

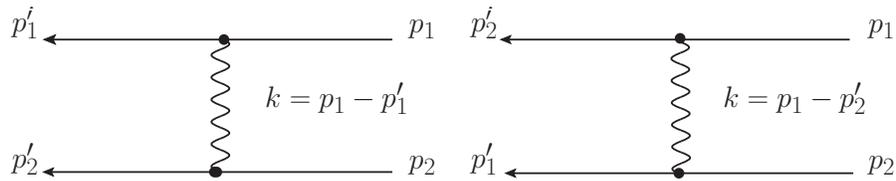


Figura 2.5: Contribuição não trivial para a amplitude.

O primeiro diagrama corresponde a parte trivial do espalhamento, (as partículas não interagem) e será descartado. Os demais diagramas correspondem a primeira contribuição não trivial para o espalhamento, da ordem e^2 na constante de acoplamento.

A expressão matemática dos diagramas de Feynman podem ser obtida diretamente das regras de Feynman para QED, dadas no final da seção

anterior⁸. Ao inserir a contribuição dos diagramas na fórmula de redução pode-se inferir as seguintes regras para construção do elemento da matriz S no espaço dos momentos:

- substitua os propagadores das linhas externas por espinores de Dirac seguindo as seguintes correspondências:⁹

$$\text{Partícula incidente} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} i u_q;$$

$$\text{Antipartícula incidente} \rightarrow -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} i \bar{v}_q;$$

$$\text{Partícula emergente} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} i \bar{u}_q;$$

$$\text{Antipartícula emergente} \rightarrow -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} i v_q;$$

- construa as amplitudes seguindo a orientação das setas nos diagramas (escreva as expressões da direita para esquerda) partindo da linha externa correspondente ao campo que encontra-se mais a direita na ordenação temporal (campo correspondente ao momento p_2 em 2.37);

- multiplique por um fator com uma delta de Dirac associada à conservação do momento: $(2\pi)^4 \delta(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)$.

Com estas regras podemos escrever o elemento da matriz S correspondente a parte não trivial do espalhamento elétron-elétron na ordem e^2 , representados pelos diagramas na figura 2.5:¹⁰

$$[S_{\alpha\beta}]_{\mathcal{O}(e^2)} = \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{e^2}{(2\pi)^2} \tau, \quad (2.38)$$

em que

$$\begin{aligned} \tau &= \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \Delta_{F\mu\nu}(k) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2) \\ &- \bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \Delta_{F\mu\nu}(k') \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2). \end{aligned} \quad (2.39)$$

⁸Além dessas regras, a construção dos diagramas segue as propriedades específicas das contrações de Wick para campos fermiônicos, o que pode gerar sinais oriundos de um número ímpar de permutações no produto dos campos ψ e $\bar{\psi}$.

⁹Essa operação amputa as linhas externas dos diagramas.

¹⁰A partir desse ponto, os cálculos são extremamente técnicos e razoavelmente extensos, de modo que preferimos deixar nos apêndices. Apresentaremos somente um esquema com os principais resultados.

Já a parte trivial, representada pelo diagrama 2.4 não contribui para a medida de espalhamento.

O propagador de Feynman do campo eletromagnético é dado no apêndice A:

$$\Delta_{F\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + \frac{(\zeta - 1)}{\zeta} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + i\epsilon)} \right]. \quad (2.40)$$

Pode-se mostrar que os termos proporcionais a $p_\mu p_\nu$ em 2.40 não contribuem para a amplitude de transição (Matriz S) 2.38. De fato, substituindo 2.40 em 2.39, obtém-se termos da forma:

$$\bar{u}(p'_1) \not{k} u(p_1) \bar{u}(p'_2) \not{k} u(p_2) - \bar{u}(p'_2) \not{k}' u(p_1) \bar{u}(p'_1) \not{k}' u(p_2), \quad (2.41)$$

em que $k = p_1 - p'_1$ e $k' = p_1 - p'_2$. Uma vez que os campos $u(p)$ são soluções da equação de Dirac $\bar{u}(p) \not{p} = u(p) M$ e $\not{p} u(p) = M u(p)$, segue que

$$\bar{u}(p'_1) (\not{p}_1 - \not{p}'_1) u(p_1) = \bar{u}(p'_2) (\not{p}_1 - \not{p}'_2) u(p_1) = 0. \quad (2.42)$$

A probabilidade de transição é obtida diretamente da equação 2.38 e dada por

$$[S_{\alpha\beta}] [S_{\alpha\beta}]^* = \frac{e^4}{(2\pi)^4} \left[\delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \right]^2 |\tau|^2, \quad (2.43)$$

em que o $|\tau|^2 = \tau\tau^*$.

É claro que o produto de deltas de Dirac em 2.43 não está bem definido, uma vez que o cálculo feito até aqui não é rigoroso. Heuristicamente, o produto de deltas pode ser entendido como

$$\left[\delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \right]^2 = \delta^4(0) \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2), \quad (2.44)$$

em que na primeira delta do produto foi utilizada explicitamente a conservação do momento-energia. É imediato concluir que a singularidade associada a $\delta^4(0)$ ocorre porque o cálculo está sendo feito em um volume infinito do espaço-tempo. De fato $\delta(k) = \int d^4x e^{ikx}$, indicando a divergência para $k = 0$. Assim, em um cálculo heurístico, pode-se considerar o sistema em um volume finito VT e implementar a substituição $\delta^4(0) \rightarrow VT$.

Portanto, a probabilidade por unidade de volume no espaço-tempo é dada por

$$\frac{[S_{\alpha\beta}][S_{\alpha\beta}]^*}{VT} = \frac{e^4}{(2\pi)^4} \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) |\tau|^2. \quad (2.45)$$

Na equação 2.45, as partículas associadas aos estados inicial e final possuem a mesma polarização. Contudo, um feixe real não é polarizado e devemos considerar uma média sobre as polarizações iniciais e finais. Mais precisamente deve-se fazer em 2.45 a substituição

$$|\tau|^2 \rightarrow |\tau|_{np}^2 = \frac{1}{4} \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon'_1} \sum_{\epsilon'_2} |\tau|^2. \quad (2.46)$$

Com isso, a densidade de probabilidade por unidade de volume no espaço-tempo *não polarizada* é dada por

$$\frac{[S_{\alpha\beta}][S_{\alpha\beta}]^*}{VT} = \frac{e^4}{(2\pi)^4} \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) |\tau|_{np}^2. \quad (2.47)$$

O cálculo de $|\tau|_{np}^2$ está desenvolvido detalhadamente no apêndice A. O resultado final é dado por

$$\begin{aligned}
|\tau|_{np}^2 &= \frac{1}{16M^4} \text{Tr} [(\not{p}'_1 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma] \\
&\times \text{Tr} [(\not{p}'_2 + M) \gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\lambda] \bar{\Delta}_{\mu\nu}(k) \bar{\Delta}_{\sigma\lambda}^*(k) \\
&- \frac{1}{16M^4} \text{Tr} [(\not{p}'_2 + M) \gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\lambda \\
&\quad (\not{p}'_1 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma] \bar{\Delta}_{\mu\nu}(k) \bar{\Delta}_{\sigma\lambda}^*(k') \\
&+ (p'_1 \leftrightarrow p'_2), \tag{2.48}
\end{aligned}$$

em que $\bar{\Delta}_{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu}$.

A seção de choque diferencial $d\sigma$ não polarizada para partículas espalhadas no ângulo sólido $d\omega$, em ordem e^4 na constante de acoplamento, é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{e^4 M^4}{16\pi^2 E^2} |\tau|_{np}^2, \tag{2.49}$$

em que E e M são, respectivamente, a energia no referencial do centro de massa e a massa dos elétrons incidentes. No apêndice B encontra-se o cálculo detalhado da expressão 2.49, onde ficará claro o aparecimento do fator que multiplica $|\tau|_{np}^2$. O quadrado da amplitude se resumirá a cálculos de traços de gammas de Dirac que, embora simples, são extensos. O resultado pode ser escrito em termos de produtos escalares envolvendo os momentos, e é dado por

$$\begin{aligned}
|\tau|_{np}^2 &= \frac{1}{2M^4} \left\{ \frac{2(p_1 \cdot p_2)^2 - 4M^2 p_1 \cdot p_2}{(p_1 - p'_2)^2 (p_1 - p'_1)^2} \right. \\
&+ \frac{2M^2(p_1 \cdot p'_1 - p_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p'_1)^2}{[(p_1 - p'_2)^2]^2} \\
&+ \left. \frac{2M^2(p_1 \cdot p'_2 - p_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p'_2)^2}{[(p_1 - p'_1)^2]^2} \right\} \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão 2.50 os produtos escalares dados no apêndice D tem-se o resultado $\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{QED}$ em termos do ângulo de espalhamento θ , a energia no centro de massa E e a massa dos elétrons M é

$$\frac{e^4 \left(4(M^2 - 2E^2)^2 \csc^4(\theta) + (E^2 - M^2)^2 + (M^4 + 4E^2M^2 - 8E^4) \csc^2(\theta) \right)}{64E^2\pi^2(E^2 - M^2)^2}. \quad (2.51)$$

É possível verificar que a expressão acima coincide com o resultado da referência (GOMES, 2015).

No capítulo 4 o resultado 2.51 será estendido para o modelo de Proca com inserção de efeitos violadores da simetria de Lorentz e seu respectivo dual, obtido através do Método de Dualização de Noether. A verificação da equivalência entre as respectivas seções de choque constitui no principal objetivo desse trabalho.

3 MÉTODO DE DUALIZAÇÃO DE NOETHER

3.1 Introdução

Em diferentes contextos é importante encontrar equivalência entre teorias que, a princípio, descrevem fenômenos distintos. Ao se estabelecer alguma equivalência pode-se estudar aspectos de uma teoria através da outra e características escondidas em uma descrição podem ser reveladas em outra.

Um exemplo bem estabelecido da teoria quântica de campos é a equivalência entre a teoria autodual (AD) e a teoria de Maxwell-Chern-Simons (MCS) em 3 dimensões (DESER; JACKIW, May 1984). Assim, há duas maneiras de descrever (em 3 dimensões) um modo massivo de spin 1 que se propaga livremente:

- pela teoria autodual:

$$\mathcal{L}_{SD} = \frac{1}{2}m^2 f_\mu f^\mu - \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} f_\mu \partial_\nu f_\rho \quad (3.1)$$

- ou através da teoria Maxwell-Chern-Simons:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}m\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} \quad (3.2)$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e m a massa do campo.

Para encontrar tal equivalência os autores de (DESER; JACKIW, May 1984) usaram a ideia da ação mestra. Outro procedimento que se mostrou eficiente para estabelecer dualidade entre alguns modelos é o Método de Dualização de Noether (MDN) (ANACLETO, Apr.2001; GUIMARAES et al., 2006).

O MDN é baseado na ideia de promover para local uma simetria global da teoria através da adição iterativa de contratermos na lagrangiana.

Na próxima seção apresentaremos o exposto no artigo (ANACLETO, Apr.2001) como exemplo do MDN. Na seção 3.3 aplicaremos o MDN ao problema do presente trabalho.

3.2 Exemplo de aplicação do MDN

Para exemplificarmos o MDN consideremos a teoria autodual com acoplamento mínimo em 3 dimensões (GOMES et al., 1998; ANACLETO, Apr.2001):

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2}m^2 f_\mu f^\mu - \frac{m}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} f_\mu \partial_\nu f_\rho - e f_\mu J^\mu + \bar{\psi}(i\not{\partial} - M)\psi \quad (3.3)$$

sendo $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ e M a massa do férmion.

O objetivo é transformar a simetria global da lagrangiana 3.3 em local, ou seja:

$$\delta f_\mu = \partial_\mu A, \quad (3.4)$$

com a mudança

$$A \rightarrow A(x). \quad (3.5)$$

A variação da lagrangiana 3.3 sob a transformação 3.4 - com o parâmetro local 3.5 - resulta em:

$$\delta\mathcal{L}^{(0)} = K^\mu \delta A_\mu \quad (3.6)$$

sendo K^μ o vetor de Euler:

$$K^\mu = m^2 f^\mu - m\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu f_\rho - e J^\mu. \quad (3.7)$$

As iterações da lagrangiana são construídas a partir de uma função f dos vetores de Euler

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_{\min}^{(0)} + f(K) \quad (3.8)$$

de modo que $f(0) = 0$.

Sendo assim uma construção simples que satisfaz esta condição é

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_{\min}^{(0)} - B_\mu K^\mu \quad (3.9)$$

onde B_μ é um campo auxiliar que se transforma como o campo f_μ :

$$\delta B_\mu = \partial_\mu \Lambda. \quad (3.10)$$

Dessa forma a variação de 3.9, usando 3.6, 3.7 e 3.10, é:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}^{(1)} &= -B^\mu \delta K_\mu \\ &= -m^2 B^\mu \delta B_\mu = -\delta \left(\frac{m^2}{2} B^2 \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Isso nos leva à segunda iteração:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(1)} + \frac{m^2}{2} B^2 \quad (3.12)$$

que é invariante de calibre - isto é, invariante sob a transformação 3.4. Escrevendo $\mathcal{L}^{(2)}$ explicitamente:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} m^2 f_\mu f^\mu - \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} f_\mu \partial_\nu f_\rho - e f_\mu J^\mu + \quad (3.13)$$

$$+ \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi - B_\mu K^\mu + \frac{m^2}{2} B^2. \quad (3.14)$$

Como B é um campo auxiliar podemos usar as equações de movimento para expressá-lo em função dos demais parâmetros. A equação de

Euler-Lagrange resulta em:

$$B_\mu = \frac{1}{m^2} K_\mu \quad (3.15)$$

Finalmente, substituindo 3.15 e 3.7 em 3.13 encontramos a lagrangiana dual invariante de calibre:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= \frac{1}{2} m^2 f_\mu f^\mu - \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} f_\mu \partial_\nu f_\rho - e f_\mu J^\mu + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi \\ &- \frac{1}{2m^2} \left[m^2 f^\mu - m \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu f_\rho - e J^\mu \right]^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3 Dualização de um Modelo com Quebra da Simetria de Lorentz

No artigo (FARGNOLI et al., Oct. 2014) é apresentada uma teoria de um campo de spin 1 livre em (3+1) dimensões, porém com a presença de termos de Procca e um termo cinético tipo éter. Estes termos quebram as simetrias de calibre e de Lorentz, respectivamente. A densidade de lagrangiana proposta em (FARGNOLI et al., Oct. 2014) é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\rho}{2} (b_\mu F^{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2} A_\mu h^{\mu\nu} A_\nu, \quad (3.17)$$

onde $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \beta b^\mu b^\nu$. Os parâmetros ρ e β auxiliam na manipulação dos novos termos, sendo conveniente caso queiramos estudar diferentes limites do modelo. O vetor de fundo constante b^μ insere na teoria uma direção preferencial no espaço-tempo e é o responsável pela violação da simetria de Lorentz.

No presente trabalho propomos uma modificação de 3.17 acoplando o campo A_μ minimamente com a matéria. Nessa seção aplicaremos o método de dualização da seção anterior à teoria em que o campo de calibre A_μ é

acoplado minimamente com a matéria fermiônica:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\rho}{2}(b^\mu F_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}A^\mu(g^{\mu\nu} - \beta b^\mu b^\nu)A^\nu + \\ &+ \bar{\psi}(i\not{\partial} + e\gamma^\mu A_\mu)\psi - M\bar{\psi}\psi.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Inicialmente devemos encontrar a variação da lagrangiana 3.18 sob a transformação:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda. \quad (3.19)$$

Sob uma transformação do campo A_μ a variação da lagrangiana é:

$$\delta\mathcal{L}^{(0)} = \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial A_\chi}\delta A_\chi + \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_\xi A_\chi)}\delta(\partial_\xi A_\chi). \quad (3.20)$$

Devido ao teorema de Gauss usado na ação temos:

$$\delta\mathcal{L}^{(0)} = \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial A_\chi}\delta A_\chi - \partial_\xi \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_\xi A_\chi)}\delta A_\chi \quad (3.21)$$

donde obtemos a variação de $\mathcal{L}^{(0)}$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^{(0)} &= \left\{ \partial_\xi F^{\xi\mu} + \rho b^\xi b_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\mu} - \rho b^\mu b_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} + m^2 h^{\mu\alpha} A_\alpha + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \right\} \delta A_\mu \\ &= K^\mu \delta A_\mu,\end{aligned}\quad (3.22)$$

com

$$K^\mu = \partial_\xi F^{\xi\mu} + \rho b^\xi b_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\mu} - \rho b^\mu b_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} + m^2 h^{\mu\alpha} A_\alpha + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (3.23)$$

Construímos então a primeira iteração introduzindo o campo auxiliar B_μ que transforma-se como $\delta B_\mu = \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} - B_\mu K^\mu. \quad (3.24)$$

Variando-se $\mathcal{L}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L}^{(1)} &= \delta\mathcal{L}^{(0)} - B_\mu\delta K^\mu - \delta B_\mu K^\mu \\
 &= K^\mu\delta A_\mu - B_\mu\delta K^\mu - \delta B_\mu K^\mu \\
 &= -B_\mu\delta K^\mu.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

O que foi possível porque as transformações dos campos B_μ e A_μ são iguais.

Fazendo então a variação da corrente encontramos

$$\begin{aligned}
 \delta K^\mu &= m^2 h^{\mu\alpha} \delta A_\alpha \\
 &= m^2 h^{\mu\alpha} \delta B_\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L}^{(1)} &= -m^2 B_\mu h^{\mu\alpha} \delta B_\alpha \\
 &= -\delta \left[\frac{m^2}{2} B_\mu h^{\mu\alpha} B_\alpha \right],
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

pois $h^{\mu\alpha}$ é simétrico.

Pela equação 3.27 sabemos qual termo deve ser adicionado a $\mathcal{L}^{(1)}$ para se obter uma lagrangiana invariante:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(1)} + \frac{m^2}{2} B_\mu h^{\mu\alpha} B_\alpha. \tag{3.28}$$

Usando as expressões acima vemos que, de fato, $\delta\mathcal{L}^{(2)} = 0$, ou seja, a teoria descrita por $\mathcal{L}^{(2)}$ é invariante de calibre.

O próximo passo é eliminar o campo auxiliar usando a equação de Euler-Lagrange:

$$K_\mu - m^2 h_{\mu\nu} B^\nu = 0. \tag{3.29}$$

Para resolver 3.29 é necessário encontrar o inverso do operador $h_{\mu\nu}$:

$$L^{\zeta\mu} h_{\mu\nu} = \delta_\nu^\zeta \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} [a_1 g^{\zeta\mu} + a_2 b^\zeta b^\mu] [g_{\mu\nu} - \beta b_\mu b_\nu] &= \delta_\nu^\zeta \\ a_1 \delta_\nu^\zeta + [-a_1 \beta + a_2 (1 - \beta b^2)] b^\zeta b_\nu &= \delta_\nu^\zeta, \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$a_1 = 1 \quad (3.31)$$

$$a_2 = \frac{\beta}{(1 - \beta b^2)} \quad (3.32)$$

resultando, por fim, na forma da inversa: $L^{\zeta\mu} = g^{\zeta\mu} + \frac{\beta}{(1 - \beta b^2)} b^\zeta b^\mu$.

Assim, a equação 3.29 pode ser resolvida:

$$B^\zeta = \frac{L^{\zeta\mu}}{m^2} K_\mu. \quad (3.33)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\rho}{2} (b^\mu F_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2} A_\mu h^{\mu\nu} A_\nu - \frac{1}{m^2} K^\sigma L_{\sigma\mu} K^\mu + \\ &+ \frac{1}{2m^2} K^\sigma L_{\sigma\mu} h^{\mu\nu} L_{\nu\chi} K^\chi + \bar{\psi} (i\not{\partial} + e\gamma^\mu A_\mu) \psi - M\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para simplificar 3.34 note que

$$\begin{aligned} K^\sigma L_{\sigma\mu} h^{\mu\nu} L_{\nu\chi} K^\chi &= K^\sigma \delta_\sigma^\nu L_{\nu\chi} K^\chi \\ &= K^\nu L_{\nu\chi} K^\chi \end{aligned}$$

e, então,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m^2}K^\sigma L_{\sigma\mu}K^\mu + \frac{1}{2m^2}K^\sigma L_{\sigma\mu}h^{\mu\nu}L_{\nu\chi}K^\chi &= -\frac{1}{m^2}K^\sigma L_{\sigma\mu}K^\mu + \frac{1}{2m^2}K^\nu L_{\nu\chi}K^\chi \\ &= -\frac{1}{2m^2}K^\mu L_{\mu\nu}K^\nu. \end{aligned}$$

Usando 3.23

$$\begin{aligned} K^\mu L_{\mu\nu}K^\nu &= \left[\partial_\xi F^{\xi\mu} + \rho b^\xi b_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\mu} - \rho b^\mu b_\alpha \partial_\xi F^{\alpha\xi} + m^2 h^{\mu\alpha} A_\alpha + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] \\ &\quad \times L_{\mu\nu} \left[\partial_\zeta F^{\zeta\nu} + \rho b^\zeta b_\chi \partial_\zeta F^{\chi\nu} - \rho b^\nu b_\chi \partial_\zeta F^{\chi\zeta} + m^2 h^{\nu\chi} A_\chi + e \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \right] \end{aligned}$$

Abrindo o produto e fazendo manipulações a lagrangiana dual será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \mathcal{L}^{(2)} \\ &= \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu) + \frac{\rho}{2}(b^\mu F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2m^2}(\partial_\xi F^{\xi\mu})(\partial_\sigma F^{\sigma\nu})L_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{\rho}{m^2}b_\chi \left[b^\nu (\partial_\sigma F^{\chi\sigma})(\partial_\xi F^{\xi\mu}) - b^\sigma (\partial_\sigma F^{\chi\nu})(\partial_\xi F^{\xi\mu}) \right] L_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{\rho^2}{2m^2}b_\alpha b_\chi \left[b^\xi b^\sigma (\partial_\xi F^{\alpha\mu})(\partial_\sigma F^{\chi\nu}) + b^\mu b^\nu (\partial_\xi F^{\alpha\xi})(\partial_\sigma F^{\chi\sigma}) \right] L_{\mu\nu} \\ &\quad - e \frac{\rho}{m^2} \bar{\psi} \left[b^\xi b_\alpha (\partial_\xi F^{\alpha\mu}) \gamma^\nu - b^\mu b_\alpha (\partial_\xi F^{\alpha\xi}) \gamma^\nu + \frac{1}{\rho} (\partial_\xi F^{\xi\mu}) \gamma^\nu \right] \psi L_{\mu\nu} \\ &\quad + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - M \bar{\psi} \psi - \frac{e^2}{2m^2} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\nu \psi L_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

O setor do campo de calibre do modelo acima concorda com o obtido em (FARGNOLI et al., Oct. 2014) no limite $e \rightarrow 0$. Contudo, é importante notar que o acoplamento entre o campo de calibre A_μ e o campo ψ não ocorre via uma derivada covariante. Na equação acima já foi introduzido o fixador de calibre.

3.4 Propagadores

Terminaremos este capítulo apresentando os propagadores correspondente à lagrangiana 3.18 e a sua dual 3.35.

O campo fermiônico ψ possui o mesmo propagador da ED nos dois casos. Contudo, o propagador do campo de calibre é diferente em cada caso. O procedimento para o cálculo dos propagadores é idêntico ao mostrado no apêndice A, porém com o *ansatz* A.8 substituído por

$$D^{\mu\nu}(k) = i \left\{ a_1 g^{\mu\nu} + a_2 \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + a_3 b^\mu b^\nu + a_4 b^\mu k^\nu + a_5 b^\nu k^\mu \right\}, \quad (3.36)$$

o qual é válido tanto no cálculo do propagador da lagrangiana 3.18 quanto 3.35. Isso pode ser visto facilmente ao escrevermos a parte quadrática em A_μ de 3.18 como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A = & \frac{1}{2} A^\mu \left\{ (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) - \rho (-b_\sigma b_\alpha \partial^\sigma \partial^\alpha g_{\mu\nu} + b_\nu b_\sigma \partial_\mu \partial^\sigma \right. \\ & \left. + b_\sigma b_\mu \partial^\sigma \partial_\nu - b_\nu b_\mu \square) + m^2 (g_{\mu\nu} - \beta b_\mu b_\nu) \right\} A^\nu, \end{aligned} \quad (3.37)$$

que escrita no espaço dos momentos é

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_A = & A^\mu \left\{ \left(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu \right) - \rho \left(-b_\sigma b_\alpha k^\sigma k^\alpha g_{\mu\nu} - b_\nu b_\sigma k_\mu k^\sigma \right. \right. \\ & \left. \left. - b_\sigma b_\mu k^\sigma k_\nu + b_\nu b_\mu k^2 \right) + m^2 (g_{\mu\nu} - \beta b_\mu b_\nu) \right\} A^\nu. \end{aligned} \quad (3.38)$$

O método para o cálculo do propagador baseado no procedimento descrito no apêndice A pode ser implementado através do pacote do *Mathematica* para cálculos algébricos *FeynCalc*. Assim determinamos os coefici-

entes a_1, a_2, \dots, a_5 em 3.36 para o propagador de 3.38:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{A_1} \\ a_2 &= \frac{1}{m^2 A_1 E} \left[A_1 E + \beta (1 + \rho b^2) (b \cdot k)^2 A_1 \right. \\ &\quad \left. + (\rho + \beta) m^2 (b \cdot k)^2 + m^2 E \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{A_1 E} \left[-\beta A_1 + (\rho + \beta) k^2 \right] \\ a_4 = a_5 &= -\frac{1}{A_1 E} (\rho + \beta) (b \cdot k), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde as funções A_1 , E são definidas como

$$\begin{aligned} A_1 &= k^2 - m^2 + \rho (b \cdot k)^2 \\ E &= (1 + \rho b^2) k^2 - m^2 (1 - \beta b^2) - \beta (b \cdot k)^2 (1 + \rho b^2). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Uma vez implementada a rotina no *FeynCalc*, os coeficientes do propagador do campo A_μ associado ao modelo Dual 3.35 são facilmente obtidos:

$$D_{\text{dual}}^{\mu\nu} = i \left\{ d_1 g^{\mu\nu} + d_2 \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + d_3 b^\mu b^\nu + d_4 (b^\mu k^\nu + b^\nu k^\mu) \right\} \quad (3.42)$$

com

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{m^2}{A_1 A_2} \\ d_2 &= -\frac{\alpha}{k^2} + \frac{(b \cdot k)^2 m^2 F}{A_1 A_2 G} + \frac{m^2}{A_1 A_2} \\ d_3 &= \frac{m^2 k^2 F}{A_1 A_2 G} = -d_1 \frac{k^2 F}{G} \\ d_4 &= -\frac{(b \cdot k) m^2 F}{A_1 A_2 G}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde as funções A_2 , F e G são

$$\begin{aligned}
 A_2 &= k^2 + \rho(b \cdot k)^2 \\
 F &= \rho A_1 + (\rho + \beta) \frac{(1 + \rho b^2)}{(1 - \beta b^2)} k^2 \\
 G &= \frac{(1 + \rho b^2)}{(1 - \beta b^2)} k^2 E.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

No próximo capítulo usaremos os propagadores 3.36 e 3.42 e os vértices de interação em 3.18 e 3.35 para calcular as seções de choque para o espalhamento elétron-elétron.

4 SEÇÃO DE CHOQUE ELÉTRON-ELÉTRON NO MODELO COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ

4.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior, a partir da lagrangiana da eletrodinâmica estendida, com um termo de Procca $\frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu$ e termos com vetor de fundo b^μ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\rho}{2}(b^\mu F_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}A_\mu(g^{\mu\nu} + \beta b^\mu b^\nu)A_\nu \\ & + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \end{aligned} \quad (4.1)$$

é possível obter um modelo dual através do Método de Dualização de Noether:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D = & \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\rho}{2}(b^\mu F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2m^2}(\partial_\xi F^{\xi\mu})(\partial_\sigma F^{\sigma\nu})L_{\mu\nu} \\ & + \frac{\rho}{m^2}b_\chi \left[b^\nu (\partial_\sigma F^{\chi\sigma})(\partial_\xi F^{\xi\mu}) - b^\sigma (\partial_\sigma F^{\chi\nu})(\partial_\xi F^{\xi\mu}) \right] L_{\mu\nu} \\ & - \frac{\rho^2}{2m^2}b_\alpha b_\chi \left[b^\xi b^\sigma (\partial_\xi F^{\alpha\mu})(\partial_\sigma F^{\chi\nu}) + b^\mu b^\nu (\partial_\xi F^{\alpha\xi})(\partial_\sigma F^{\chi\sigma}) \right] L_{\mu\nu} \\ & + i\bar{\psi}\cancel{\partial}\psi - M\bar{\psi}\psi \\ & - \frac{e}{m^2}\bar{\psi}\Gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{e^2}{2m^2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma^\nu\psi L_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que

$$L_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{\beta}{1 - \beta b^2}b_\mu b_\nu \quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu = & \gamma^\beta \left\{ g^{\mu\alpha} \left[\square + \rho(b \cdot \partial)^2 \right] + \rho b^\alpha b^\mu \square \right. \\ & \left. - \partial^\mu \partial^\alpha - \rho(b \cdot \partial)(b^\mu \partial^\alpha + b^\alpha \partial^\mu) \right\} L_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

O método foi descrito no capítulo 3. Um aspecto importante é que o modelo dual é invariante de calibre, simetria ausente no modelo original 4.1.

O objetivo desse capítulo é apresentar um procedimento que permita verificar a equivalência física dos dois modelos. Para isso será calculada a seção de choque do espalhamento elétron-elétron a partir das lagrangianas 4.1 e 4.2.

4.2 Cálculo da Seção de Choque: Lagrangiana 4.1

O procedimento para o cálculo da seção de choque do espalhamento elétron-elétron na eletrodinâmica estendida com termo de Procca e a violação de Lorentz segue o mesmo procedimento descrito na seção 2.4.

Comparando a lagrangiana 4.1 com 2.29, conclui-se que a única modificação no cálculo da matriz S na ordem e^2 é a substituição nos diagramas de Feynman na figura 2.5 do propagador 2.40 pelo propagador

$$D^{\mu\nu}(p) = a_1 g^{\mu\nu} + a_2 \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} + a_3 b^\mu b^\nu + a_4 b^\mu p^\nu + a_5 b^\nu p^\mu, \quad (4.5)$$

em que os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_5 foram definidos em 3.39 e 3.40.

Com isso a expressão 2.39 é substituída por

$$\begin{aligned} \tau &= \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2) D_{\mu\nu}(k) \\ &- \bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2) D_{\mu\nu}(k'), \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $k = p_1 - p'_1$ e $k' = p_1 - p'_2$. Como ocorreu no caso da QED, a propriedade 2.42 garante que termos proporcionais ao momento externo em 4.5 não contribuirão no cálculo para a amplitude. Portanto, somente os termos proporcionais aos coeficientes a_1 e a_3 contribuirão.

Os cálculos algébricos são implementados realizando-se, na expressão 2.39, a substituição

$$\Delta_{\mu\nu}(p) \longleftrightarrow a_1 g_{\mu\nu} + b_3 b_\mu b_\nu. \quad (4.7)$$

Embora simples, os cálculos são muito extensos, sendo de grande utilidade a utilização de um programa de manipulações algébricas como o *FeynCalc*. Para obter uma expressão simplificada para a seção de choque, fizemos uma aproximação em que $m/M \ll 1$ e o parâmetro $|b^2| \ll 1$.

Escolhendo o b^μ tipo espaço e dado por $b^\mu = (0, 0, 0, t)$, com $t \ll 1$, e com a mesma orientação do elétron espalhado com momento p'_1 , obtém-se a seção de choque até a ordem $\mathcal{O}(m/M)^2$ e $\mathcal{O}(t^2)$, dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^{(b^2 < 0)} = \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{QED} + \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{Procca} + \rho \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{LV}^{(b^2 < 0)} + \dots, \quad (4.8)$$

em que ‘ \dots ’ indicam termos de ordem superior. O primeiro termo em 4.8 corresponde a seção de choque apresentada em 2.51, referente à QED. O segundo e terceiro termo, respectivamente, correspondem às contribuições correspondentes à massa do fóton, introduzida pelo modelo de Procca, e a violação de Lorentz introduzida pelo vetor b^μ . As expressões explícitas das correções para a seção de choque da QED são dadas por

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{Procca} &= \frac{m^2}{64\pi^2 E^2 (M^2 - E^2)^3 (\cos(\theta) - 1)^3 (\cos(\theta) + 1)^3} \\ &\times \left[5E^4 \cos^4(\theta) + 18E^4 \cos^2(\theta) - 6E^2 M^2 \cos^4(\theta) \right. \\ &+ 9E^4 - 12E^2 M^2 \cos^2(\theta) - 14E^2 M^2 \\ &\left. + M^4 \cos^4(\theta) + M^4 \cos^2(\theta) + 6M^4 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{LV}^{(b^2 < 0)} &= \frac{t^2}{256\pi^2 E^2 (E^2 - M^2)^2 (\cos(\theta) - 1)^3 (\cos(\theta) + 1)^3} \\
&\times \left[31E^4 \cos^6(\theta) + 4E^4 \cos^5(\theta) + 199E^4 \cos^4(\theta) \right. \\
&+ 8E^4 \cos^3(\theta) + 261E^4 \cos^2(\theta) - 12E^4 \cos(\theta) + 21E^4 \\
&- 40E^2 M^2 \cos^6(\theta) - 3E^2 M^2 \cos^5(\theta) + 149E^2 M^2 \cos^4(\theta) \\
&- M^4 \cos^5(\theta) + 2M^4 \cos^4(\theta) + 10M^4 \cos^3(\theta) \\
&\left. + 105M^4 \cos^2(\theta) - 9M^4 \cos(\theta) + 12M^4 \right]. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Note em 4.8 que, na ordem $\mathcal{O}(t^2)$, somente o termo correspondente ao parâmetro ρ , $(b^\mu F_{\mu\nu})^2$, fornece uma correção para a seção de choque da QED proveniente da violação da simetria de Lorentz.

Por outro lado, a escolha do vetor $b^\mu = (t, 0, 0, 0)$, portanto do tipo tempo, produz uma correção para a seção de choque da QED análoga a 4.8 mas com $\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{LV}^{(b^2 < 0)}$ substituído por

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{LV}^{(b^2 > 0)} &= \frac{t^2}{256 \left[\pi^2 E^2 (E^2 - M^2)^2 (\cos(\theta) - 1)^2 (\cos(\theta) + 1)^2 \right]} \\
&\times \left[3E^4 \cos^4(\theta) + 4E^4 \cos^3(\theta) \right. \\
&+ 30E^4 \cos^2(\theta) + 12E^4 \cos(\theta) + 15E^4 \\
&- 6E^2 M^2 \cos^4(\theta) - 5E^2 M^2 \cos^3(\theta) \\
&- 3E^2 M^2 \cos^2(\theta) - 3E^2 M^2 \cos(\theta) \\
&- 15E^2 M^2 + 3M^4 \cos^4(\theta) + M^4 \cos^3(\theta) \\
&\left. - 9M^4 \cos^2(\theta) - M^4 \cos(\theta) + 6M^4 \right]. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Como esperado, as contribuições da QED e de Procca em 4.8 são independentes da escolha do vetor b^μ . O modelo dual será fisicamente equivalente ao modelo descrito pela lagrangiana 4.1 caso reproduza a mesma

seção de choque obtida em 4.8 nos dois casos. Esse será o assunto tratado na próxima seção.

4.3 Cálculo da Seção de Choque: Lagrangiana Dual

O cálculo da seção de choque da lagrangiana dual pode ser implementado através dos mesmos passos dos casos anteriores. Contudo, uma maneira simples de testar a equivalência é obtida pela seguinte estratégia.

A lagrangiana dual possui um vértice de interação com quatro férmions dado por

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{e^2}{2m^2} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\nu \psi L_{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

A contribuição deste vértice para o elemento da matriz S ao qual estamos interessados pode ser obtido a partir da fórmula de redução, calculando a função de Green 2.37 via

$$\langle 0_v | T \left(\psi_0(x_1) \psi_0(x_2) \bar{\psi}_0(y_1) \bar{\psi}_0(y_2) \right) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} | 0_v \rangle, \quad (4.13)$$

em que $|0_v\rangle$ e ψ_0 correspondem ao vácuo e o campo da teoria livre. O termo de ordem e^2 virá do termo de primeira ordem na expansão da exponencial em 4.13. Assim, deve-se calcular o produto ordenado dos campos em termos do vácuo $|0_v\rangle$ e dos campos ψ_0 da teoria livre:

$$\langle 0_v | T \left(\psi_0(x_1) \psi_0(x_2) \bar{\psi}_0(y_1) \bar{\psi}_0(y_2) \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu \psi_0(x) \bar{\psi}_0(x) \gamma^\nu \psi_0(x) \right) | 0_v \rangle, (4.14)$$

que após as contração de Wick fornecerão, no espaço dos momentos, as duas contribuições

$$\begin{aligned}
& - S_F(p'_1) \gamma^\mu S_F(p_1) S_F(p'_2) \gamma^\nu S_F(p_2) \\
& + S_F(p'_2) \gamma^\mu S_F(p_1) S_F(p'_1) \gamma^\nu S_F(p_2). \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Os diferentes sinais ocorrem devido a estatística fermiônica dos elétrons. A expressão 4.15 pode ser representada pelos diagramas da figura 4.1. Usando as regras definidas na página 29, obtem-se a seguinte contribuição para a amplitude de probabilidade (matriz S), correspondente aos diagramas da figura 4.1:

$$[S_{\alpha\beta}]_{\mathcal{O}(e^2)}^{4V} = \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{e^2}{(2\pi)^2} \tau_4, \tag{4.16}$$

em que τ_4 é

$$\begin{aligned}
\tau_4 & = \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2) \left[\frac{iL_{\mu\nu}}{m^2} \right] \\
& - \bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2) \left[\frac{iL_{\mu\nu}}{m^2} \right], \tag{4.17}
\end{aligned}$$

em que $L_{\mu\nu}$ foi definido em 4.3.

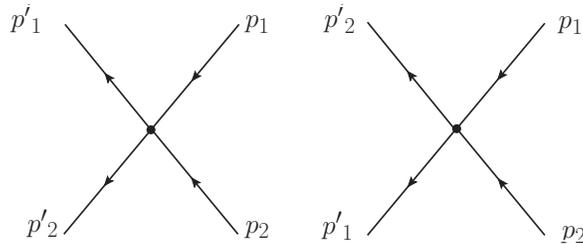


Figura 4.1: Vértice de quatro linhas. As linhas superiores correspondem ao fator $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ enquanto que as linhas inferiores estão associadas com o fator $\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$.

A lagrangiana dual 4.2 também possui uma contribuição com três campos, representada diagramaticamente na figura 4.2. A contribuição para a matriz S é dada por

$$[S_{\alpha\beta}]_{\mathcal{O}(e^2)}^{3V} = \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{e^2}{(2\pi)^2} \tau_3, \quad (4.18)$$

em que τ_3 é

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \bar{u}(p'_1) \Gamma_\mu(k) u(p_1) \bar{u}(p'_2) \Gamma_\nu(k) u(p_2) D_{\text{dual}}^{\mu\nu}(k) \\ &- \bar{u}(p'_2) \Gamma_\mu(k') u(p_1) \bar{u}(p'_1) \Gamma_\nu(k') u(p_2) D_{\text{dual}}^{\mu\nu}(k') \end{aligned} \quad (4.19)$$

e $D_{\mathcal{D}}^{\mu\nu}(k)$ foi dado em 3.42. O fator $\Gamma^\mu(k)$ representa a expressão 4.4 no espaço dos momentos, conforme o cálculo descrito detalhadamente no apêndice F.

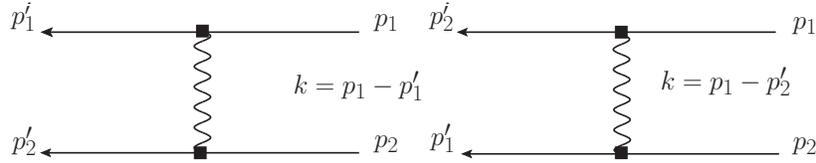


Figura 4.2: Contribuição não trivial do espalhamento elétron-elétron na teoria dual. A linha ondulada representa o propagador do modelo dual e os quadrados em preto representam os fatores $\Gamma^\mu(k)$.

Além da propriedade 2.42, uma simplificação importante no cálculo da contribuição 4.19 vem do fato de que $\Gamma^\mu k_\mu = 0$, como pode ser verificado utilizando a expressão F.11 do apêndice F. Assim, após a implementação da álgebra tensorial, a expressão 4.19 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2) \left[\frac{\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k)}{m^4} \right] \\ &- \bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2) \left[\frac{\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k')}{m^4} \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

na qual

$$\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k) = c_1 g_{\mu\nu} + c_2 b_\mu b_\nu \quad (4.21)$$

com

$$c_1 = id_1 \left(\rho (b \cdot k)^2 + k^2 \right)^2 \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned} c_2 = & \frac{id_1 k^2}{(1 - \beta b^2)^2} \left\{ (\rho + \beta) (b \cdot k)^2 (\rho - 2\rho\beta b^2 - \beta) \right. \\ & + k^2 (\rho + \beta) (2 - b^2\beta + b^2\rho) \\ & \left. - (1 + b^2\rho)^2 \frac{F}{G} [\beta (b \cdot k)^2 - k^2]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Os coeficientes d_1 , F e G foram definidos na página 43.

Portanto, a amplitude total para a seção de choque do espalhamento elétron-elétron no modelo dual é dada em termos da soma das contribuições 4.17 e 4.20 por

$$\begin{aligned} \tau = & \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2) \left[\frac{\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k)}{m^4} + \frac{iL_{\mu\nu}}{m^2} \right] \\ & - \bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2) \left[\frac{\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k')}{m^4} + \frac{iL_{\mu\nu}}{m^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Utilizando 4.21 e 4.3 tem-se que

$$\left[\frac{\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k)}{m^4} + \frac{iL_{\mu\nu}}{m^2} \right] = a_1 g_{\mu\nu} + a_3 b_\mu b_\nu. \quad (4.25)$$

Com este resultado é possível concluir que a amplitude 4.24 é idêntica a amplitude 4.6, conduzindo a mesma seção de choque.

5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho investigamos uma extensão da Eletrodinâmica Quântica em que a simetria de Lorentz e de calibre são explicitamente quebradas. A violação da simetria de Lorentz é implementada por anisotropias do espaço-tempo introduzidas por tensores constantes, enquanto a violação da simetria de calibre é realizada pela introdução de termos de massa para o fóton. A motivação para o modelo vem de resultados encontrados na literatura (BRITO et al., June 2013; FARGNOLI et al., Oct. 2014; EL-MENOUFI; DONOGHUE, 2013), sugerindo uma relação entre a violação das duas simetrias. Esse tipo de análise pode ser relevante ao estudo de aspectos fenomenológicos de extensões do Modelo Padrão (COLLADAY; KOSTELECKY, Oct.1998).

Utilizando o Método de Dualização de Noether obtivemos a teoria dual do modelo original que fornece, em particular, um modelo invariante de calibre. O propósito central do trabalho foi determinar a equivalência física entre os modelos quando o campo de calibre é minimamente acoplado com férmions de Dirac, uma vez que resultados conhecidos na literatura indicam que a equivalência não pode ser obtida considerando apenas a teoria livre (FARGNOLI et al., Oct. 2014).

Para testar a equivalência dos modelos calculamos a seção de choque para o espalhamento elétron-elétron e mostramos que, em segunda ordem no parâmetro que introduz a violação da simetria de Lorentz, o modelo original e seu dual fornecem o mesmo valor. Com isso temos um resultado original que estende a análise inicial feita em (FARGNOLI et al., Oct. 2014).

Uma extensão natural do trabalho é verificar a equivalência quântica entre os modelos em um contexto não perturbativo, recorrendo aos métodos funcionais utilizados em (GOMES et al., 1998). Outro seguimento interessante seria aprofundar a investigação no sentido de estabelecer al-

guma relação entre a violação da simetria de Lorentz e de calibre, como sugerido na referência (DONOGHUE et al., 2010).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AAD, G. et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. **Phys. Lett. B**, College Park, v.716, n.1, p. 1–29, Sept.2012.

ANACLETO, M. A. Dual equivalence between selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical U(1) charged matter. **Phys. Lett. B**, College Park, v.504, n.3, p. 268–274, Apr.2001.

ANBER, M. M. et al. Comments on the Minimal Vectorial Standard Model. **Phys. Rev. D**, College Park, v.80, p. 015012, July 2009.

BELICH, H. et al. Violação da simetria de Lorentz. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, p. 57 – 64, 2007.

BERINGER, J. et al. Review of Particle Physics (RPP). **Phys. Rev. D**, College Park, v.86, p. 010001, July 2012.

BJERRUM-BOHR, N. E. J. **Quantum Gravity as an Effective Field Theory**, p. 107 p., Tese (Doutorado em Física) – Universidade de Copenhagen, Copenhagen, 2003.

BRITO, L. C. T. et al. Aspects of Quantum Corrections in a Lorentz-violating Extension of the Abelian Higgs Model. **Phys. Rev. D**, College Park, v.87, n. 12, p. 125023, June 2013.

CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics. **Phys. Rev. D**, College Park, v.41, p. 1231, Feb.1990.

CHRISTENSON, J. H.; CRONIN, J. W.; FITCH, V. L.; TURLAY, R. Evidence for the 2π decay of the k_2^0 meson. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, College Park, v.13, p. 138–140, Jul.1964.

COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V. A. CPT violation and the standard model. **Phys. Rev. D**, College Park, v.55, p. 6760–6774, July 1997.

COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V. A. Lorentz violating extension of the standard model. **Phys. Rev. D**, College Park, v.58, p. 116002, Oct.1998.

DESER, S.; JACKIW, R. 'Selfduality' of Topologically Massive Gauge Theories. **Phys. Lett. B**, College Park, v.139, p. 371, May 1984.

DONOGHUE, J. F.; ANBER, M.; AYDEMIR, U. Gauge noninvariance as tests of emergent gauge symmetry. in: MEETING ON CPT AND LORENTZ SYMMETRY, 5.,2010, Bloomington. In: **Proceedings, 5th**

Meeting on CPT and Lorentz Symmetry CPT 10. [S.l.: s.n.], 2010. Bloomington: Indiana University, 2010., p. 113–117.

EL-MENOUFI, B. M.; DONOGHUE, J. F. Photon-photon scattering and tests of gauge invariance. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, College Park, v.87, p. 036005, Feb 2013.

ELLIS, J. R. Limits of the standard model. In: **PSI Zuoz Summer School on Exploring the Limits of the Standard Model Zuoz, Engadin, Switzerland, August 18-24, 2002.** [S.l.: s.n.], 2002.

FARGNOLI, H. G.; BRITO, L. C. T.; SCARPELLI, A. P. B.; SAMPAIO, M. Dual embedding of extended models with a Lorentz-breaking mass term. **Phys. Rev.D**, College Park, v.90, n. 8, p. 085016, Oct. 2014.

GOMES, M.; MALACARNE, L. C.; SILVA, A. J. da. On the equivalence of the selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to fermions. **Phys. Lett.B**, College Park, v.439, n. 1-2, p. 137–141, 1998.

GOMES, M. O. C. **Teoria Quântica de Campos.** Universidade de São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo(EDUSP), 2015.

GREINER, W. **Classical Theoretical Physics.** [S.l.]: Springer, 2004.

GUIMARAES, M. S.; GRIGORIO, L.; WOTZASEK, C. **The Dual of the Carroll-Field-Jackiw Model,** 2006.

HIGGS, P. W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. **Phys. Rev.**, College Park, v.145, p. 1156–1163, May. 1966.

HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. **Phys. Rev. Lett.**, College Park, v13, p. 508–509, Oct. 1964.

KOSTELECKY, V. A. The Status of CPT.in: International WEIN Symposium, Santa Fe, USA, June 14-19, 1998. **Physics beyond the standard model. Proceedings, 5th,** p. 588–600, 1998.

KOSTELECKY, V. A.; RUSSELL, N. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. **Rev. Mod. Phys.**, v. 83, p. 11–31, 2011.

LANGACKER, P. **The Standard Model and Beyond.** [S.l.]: CRC Press, 2009. (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation).

MANDL F., S. G. **Quantum Field Theory.** [S.l.]: Wiley, 2010.

NICOLAIDOU, R.; SIROIS, Y. The Higgs boson discovery and measurements. **Comptes Rendus Physique**, v. 16, p. 379–393, 2015.

NOVAES, S. F. Standard model: An Introduction. in: Particles and fields. Proceedings, 10th Jorge Andre Swieca Summer School, Sao Paulo, Brazil, February 6-12, 1999. **proceedings...**, 1999.

PESKIN, M.; SCHROEDER, D. **An Introduction to Quantum Field Theory**. [S.l.: s.n.], 1995. (Advanced book classics).

SALAM, A.; WARD, J. Electromagnetic and weak interactions. **Phys. Lett**, College Park v.13, n. 2, p. 168 – 171, Nov. 1964.

SALAM, A.; WARD, J. On a gauge theory of elementary interactions. *il nuovo cimento* (1955-1965). **Società Italiana di Fisica**, v. 19, n. 1, p. 165–170, Set. 1961.

SREDNICKI, M. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

STREATER, A. S. W. R. F. **PCT, Spin and Statistics, and All That**. Princeton University: Princeton University Press.

A CÁLCULO DO PROPAGADOR DO FÓTON NA QED

Consideramos a ação do eletromagnetismo escrita na forma covariante

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (\text{A.1})$$

em que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\zeta}{2} (\partial_\sigma A^\sigma)^2, \quad (\text{A.2})$$

que engloba o termo de Maxwell e um termo de fixação de calibre, representada pela constante real ζ . O tensor do campo eletromagnético é definido por $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Substituindo $F^{\mu\nu}$ em A.2 obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{\zeta}{2} (\partial_\sigma A^\sigma)^2. \quad (\text{A.3})$$

Os dois primeiros termos podem ser reescritos integrando-se por partes na ação

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu) \\ &= A^\nu (\partial_\mu A_\nu)|_\Sigma - \int d^4x A^\nu \partial_\mu \partial^\mu A_\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde usamos o teorema de Gauss para escrever nossa integral de volume em uma integral de superfície. Como condição de contorno fazemos os campos irem para zero no infinito. O mesmo para o primeiro termo da equação A.3. Logo a lagrangiana pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} A^\mu [\square g_{\mu\nu} + (\zeta - 1) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu \\ &\equiv \frac{1}{2} A^\mu \mathcal{O}_{\mu\nu} A^\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

O inverso do operador $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ vezes $(-i)$ é o propagador do fóton. Fazendo uma transformada de Fourier encontramos:

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}(p) = -g^{\mu\nu}p^2 + (1-\zeta)p_\mu p_\nu. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, devemos resolver a equação

$$\mathcal{O}^{\mu\gamma}(p) \Delta_{\gamma\nu} = -i\delta_\nu^\mu \quad (\text{A.7})$$

A única escolha possível de um tensor a partir dos tensores disponíveis $g_{\mu\nu}$ e $p_\mu p_\nu$ é

$$\Delta_{\gamma\nu} = a_1 g_{\gamma\nu} + a_2 p_\gamma p_\nu, \quad (\text{A.8})$$

logo, usando A.6, a equação (A.7) torna-se

$$\begin{aligned} \left[-g^{\mu\gamma}p^2 + (1-\zeta)p^\gamma p^\mu \right] [a_1 g_{\gamma\nu} + a_2 p_\gamma p_\nu] &= -i\delta_\nu^\mu \\ -a_1 p^2 \delta_\nu^\mu + a_1 (1-\zeta)p_\nu p^\mu + a_2 \zeta p^2 p^\mu p_\nu &= -i\delta_\nu^\mu \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema encontramos

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{i}{p^2} \\ a_2 &= -i \frac{(1-\zeta)}{\zeta} \frac{1}{p^4}. \end{aligned}$$

Portanto, o propagador do fóton em um calibre arbitrário é

$$\Delta_{\mu\nu} = -i \left[\frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} + \frac{(\zeta - 1)}{\zeta} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + i\epsilon)^2} \right]. \quad (\text{A.9})$$

B SEÇÃO DE CHOQUE

Seção de choque é uma grandeza de grande utilidade quando desejamos avaliar e tirar informações de um espalhamento. Vamos discutir heurísticamente a definição da seção de choque de modo que se possa escrever esta em função das variáveis físicas presentes no espalhamento de partículas. Consideremos uma quantidade de N_i partículas incidentes se movendo ao longo de um eixo x de modo que encontre um alvo fixo, constituído de N_{alv} partículas. Existirá um certo número de partículas N que interagirão com o alvo e espalharão. Podemos contar esse número N , assim como podemos controlar o número de partículas do alvo e de partículas incidentes. É fato que N dependerá, diretamente, do número de N_{alv} e N_i , ou seja

$$N \propto N_i N_{alv}. \quad (\text{B.1})$$

De uma forma simplificada podemos dizer que o feixe incidente e o alvo, por conveniência, ocupam uma mesma seção transversal de área A e comprimento L . Essas partículas atravessam a região L em um tempo T . Com isso fazemos a seguinte construção

$$N \propto \frac{N_i}{AL} \frac{L}{T} \frac{N_{alv}}{V} AVT. \quad (\text{B.2})$$

Reconhecemos N_i/AL como uma densidade de partículas incidentes ρ_i , N_{alv}/V como uma densidade ρ_{alv} de partículas do alvo e v_i a velocidade do feixe incidente. Assim escrevemos

$$\frac{N}{VT} \propto \rho_i v_i \rho_{alv} \sigma [A]. \quad (\text{B.3})$$

Essa equação esta devidamente balanceada em termos de dimensão, basta agora identificarmos quais as quantidades físicas envolvidas. O termo do

lado esquerdo pode ser substituído, sem perda de sentido físico, pela Probabilidade de Transição, já que está é uma medida que depende diretamente de N . Logo tem-se uma probabilidade de transição localizada em um certo volume V do espaço em um tempo T . Já a grandeza com dimensão de área, denotada por $\sigma[A]$, é definida como a seção de choque do espalhamento em questão. A seção de choque pode então ser escrita em termos da probabilidade de transição, obtida na equação 2.43. Teremos

$$\sigma = \frac{[S_{\alpha\beta}][S_{\alpha\beta}]^*}{VT} \frac{1}{\rho_i \rho_{alv} v} \quad (\text{B.4})$$

A probabilidade de transição é definida como

$$[S_{\alpha\beta}][S_{\alpha\beta}]^* = |\text{amplitude de transição}|^2, \quad (\text{B.5})$$

cujos cálculos veremos no apêndice C.

Caso o alvo esteja em movimento em relação ao feixe incidente, basta substituir o v pela velocidade relativa v_{rel} . A equação B.4 ficará na forma

$$\sigma = \frac{[S_{\alpha\beta}][S_{\alpha\beta}]^*}{VT} \frac{1}{\rho_i \rho_{alv} v_{rel}} \quad (\text{B.6})$$

Na equação B.4 a densidade de partículas incidentes é a densidade eletrônica j^0 . Nos estados de momento p_1 a densidade eletrônica será

$$\langle p_1 | : \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) : | p_1 \rangle = \frac{E_{p_1}}{(2\pi)^3 M} \quad (\text{B.7})$$

a qual podemos demonstrar usando as definições de campo da equação 2.15. Logo a seção de choque diferencia de um espalhamento elétron-elétron, para elétrons emergentes com momentos p'_1 e $p'_1 + dp'_1$, p'_2 e $p'_2 + dp'_2$, é

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^8} \frac{\delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) |\tau|^2}{\frac{E_{p_1} E_{p_2}}{(2\pi)^6 M^2} v_{rel}} \frac{d^3 p'_1}{E_{p'_1}/M} \frac{d^3 p'_2}{E_{p'_2}/M} \quad (\text{B.8})$$

onde v_{rel} é a velocidade relativa dos feixes em relação ao laboratório. Em que

$$v_{rel} = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_{p_1}} - \frac{\vec{p}_2}{E_{p_2}} \right|, \quad (\text{B.9})$$

é relativisticamente invariante, pois

$$\begin{aligned} [E_{p_1} E_{p_2} v_{rel}]^2 &= [(p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2] \\ &= (E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 - (E_1^2 - \vec{p}_1^2) (E_2^2 - \vec{p}_2^2) \\ &= E_1^2 E_2^2 - 2E_1 E_2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 \\ &\quad - E_1^2 E_2^2 + E_1^2 \vec{p}_2^2 + E_2^2 \vec{p}_1^2 - (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 \\ &= -2E_1 E_2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + E_1^2 \vec{p}_2^2 + E_2^2 \vec{p}_1^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

ou simplesmente

$$\begin{aligned} E_{p_1} E_{p_2} v_{rel} &= E_1 E_2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| \\ [E_{p_1} E_{p_2} v_{rel}]^2 &= E_1^2 E_2^2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right|^2 \\ &= E_1^2 E_2^2 \left[\frac{\vec{p}_1^2}{E_1^2} - 2 \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{E_1 E_2} + \frac{\vec{p}_2^2}{E_2^2} \right] \\ &= [E_2^2 \vec{p}_1^2 - 2E_1 E_2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + E_1^2 \vec{p}_2^2]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

No sistema, cujo referencial está fixo no centro de massa C_M do sistema, os momentos estão relacionados por $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, como pode-se notar na figura B.1.

Integramos $d\sigma$ no sistema de coordenadas esféricas onde o vetor que corresponde ao raio é $|\vec{p}_1|$

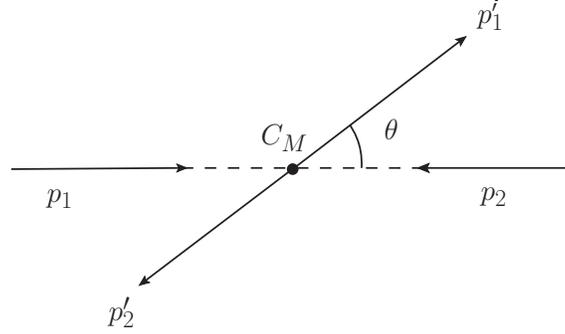


Figura B.1: Espalhamento elétron-elétron: p_1 e p_2 são os momentos do estado inicial e p_1^i e p_2^f . θ é o ângulo de espalhamento.

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{e^4 M^4}{2(2\pi)^2 E |\vec{p}_1|} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int |\vec{p}_1|^2 |\tau|^2 \sin\theta d\theta d\phi \frac{d|\vec{p}_1|}{d\omega} \frac{d^3 p_2'}{E_2' E_1'} \quad (\text{B.12})$$

ou seja, levamos $d^3 p_1^i \rightarrow |\vec{p}_1|^2 \sin\theta d\theta d\phi d|\vec{p}_1|$. Sabendo que o ângulo sólido, neste caso, é definido por $d\omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ a integral ficará na forma:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{e^4 M^4}{2(2\pi)^2 E |\vec{p}_1|} \int \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) |\tau|^2 \frac{d^3 p_2'}{E_2'} \frac{|\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1|}{E_1'} \quad (\text{B.13})$$

Fazendo-se a integração é possível separar a delta na parte espacial e temporal, ou seja

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{|\vec{p}_1|^2}{E_1' E_2'} d|\vec{p}_1| \int d^3 p_2' \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \\ &= \int \frac{|\vec{p}_1|^2}{E_1' E_2'} d|\vec{p}_1| \int d^3 p_2' \delta(p_i^0 - p_f^0) \delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

que, por meio dos vínculos $E_i = E_1 + E_2 = 2E$; $\vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ removemos a dependência em p_2' , então

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{|\vec{p}'_1|^2}{E'_2 E'_1} d|\vec{p}'_1| \delta \left(E_i - E'_1 - \sqrt{M^2 + |\vec{p}_i - \vec{p}'_1|^2} \right) \\
&= \int \frac{|\vec{p}'_1|^2}{E'_1 E'_2} \delta (f(E'_1)) d|\vec{p}'_1| \\
&= \int dE'_1 \frac{|\vec{p}'_1|}{E'_2} \delta (f(E'_1)). \tag{B.15}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
f(E'_1) &= E_i - E'_1 - E'_2 \\
&= E_i - E'_1 - \sqrt{M^2 + |\vec{p}_i - \vec{p}'_1|^2}. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Onde a função $f(E'_1)$ possui um ponto de zero em $E'_{1(0)}$, ou seja, em $E'_1 = E'_{1(0)}$ podemos usar as propriedades de integração da delta de Dirac

$$\int F(E'_1) \delta(f(E'_1)) dE'_1 = F(E'_{1(0)}) \left| \frac{\partial f}{\partial E'_1} \right|_{E'_1=E'_{1(0)}}^{-1}. \tag{B.17}$$

Teremos

$$\left| \frac{\partial f}{\partial E'_1} \right| = 1 + \frac{\partial E'_2}{\partial E'_1} \tag{B.18}$$

e

$$E'_2 = \sqrt{E'^2_1 + |\vec{p}_i|^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}'_1}, \quad \text{pois } |\vec{p}'_1|^2 = M^2 + E'^2_1. \tag{B.19}$$

A derivada ficará na forma

$$\frac{\partial E'_2}{\partial E'_1} = \frac{1}{2} \frac{2E'_1 - 2\cos\alpha \vec{p}_i \cdot \frac{\partial \vec{p}'_1}{\partial E'_1}}{\sqrt{E'^2_1 + |\vec{p}_i|^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}'_1}}, \tag{B.20}$$

onde α é o ângulo entre os vetores \vec{p}_i e \vec{p}_1 .

Teremos

$$\frac{\partial E'_2}{\partial E'_1} = \left[E'_1 - \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_1}{|\vec{p}_1|^2} \right] (E'_2)^{-1}. \quad (\text{B.21})$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial E'_1} = \frac{|\vec{p}_1|^2 E_i - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_1 E'_1}{|\vec{p}_1|^2 E'_2}. \quad (\text{B.22})$$

Quando aplicado no ponto zero teremos

$$\left. \frac{\partial f}{\partial E'_1} \right|_{E'_1 = E'_{1(0)}} = \frac{E_i}{E'_2} \quad (\text{B.23})$$

A equação B.17 ficará na forma

$$I = \frac{|\vec{p}_1|}{E_i} \quad (\text{B.24})$$

então a seção de choque para elétrons espalhados em um ângulo sólido $d\omega$ é

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{e^4 M^4}{4(2\pi) E^2} |\tau|^2. \quad (\text{B.25})$$

onde o sub-índice np designa “não-polarizado” e o produto $|\tau|^2$, definido no capítulo 2, é

$$\begin{aligned}
\tau\tau^* &= [\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)\Delta_{F\mu\nu}(k)\bar{u}(p'_2)\gamma^\nu u(p_2) \\
&\quad - \bar{u}(p'_2)\gamma^\mu u(p_1)\Delta_{F\mu\nu}(k')\bar{u}(p'_1)\gamma^\nu u(p_2)] \\
&\quad \times [\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)\Delta_{F\mu\nu}(k)\bar{u}(p'_2)\gamma^\nu u(p_2) \\
&\quad - \bar{u}(p'_2)\gamma^\mu u(p_1)\Delta_{F\mu\nu}(k')\bar{u}(p'_1)\gamma^\nu u(p_2)]^*, \quad (C.3)
\end{aligned}$$

onde, agora, adotamos a notação $\Delta_{F\mu\nu}$, ao invés de $\tilde{\Delta}_{F\mu\nu}$, para denotar o propagador no espaço dos momentos. Mais a frente denotaremos a dependência do propagador pelos momentos internos k e k' por um super-índice na forma $\Delta_{\mu\nu}^k$ e $\Delta_{\mu\nu}^{k'}$.

Podemos simplificar este produto por meio do resultado

$$\begin{aligned}
[\bar{u}'\gamma^\nu u]^* &= [(u')^\dagger\gamma^0\gamma^\nu u]^* \\
&= [(u'^{T*})^*(\gamma^0)^*(\gamma^\nu)^*u^*] \\
&= \left\{ [(u')^T\gamma^0\gamma^{\nu*}u^*]^T \right\}^T \\
&= \left[(u^*)^T(\gamma^{\nu*})^T\gamma^0((u')^T)^T \right]^T \\
&= [u^\dagger\gamma^0\gamma^0(\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0u']^T \\
&= [\bar{u}\gamma^0(\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0u']^T \\
&= \bar{u}\gamma^\nu u' \quad (C.4)
\end{aligned}$$

onde $\bar{u} \equiv \bar{u}(p_i)$ e $u \equiv u(p_i)$. Com essas simplificações, $\tau\tau^*$ passa a ser o produto

$$\begin{aligned} & \left[\underbrace{\bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2) \Delta_{\mu\nu}^k}_{I} - \underbrace{\bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2) \Delta_{\mu\nu}^{k'}}_{II} \right] \\ \times & \left[\underbrace{\bar{u}(p_2) \gamma^\lambda u(p'_2) \bar{u}(p_1) \gamma^\sigma u(p'_1) \Delta_{\sigma\lambda}^{k*}}_{III} - \underbrace{\bar{u}(p_2) \gamma^\lambda u(p'_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\sigma u(p'_2) \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*}}_{IV} \right], \end{aligned}$$

ou seja

$$|\tau|_{np}^2 = (I \times III) - (I \times IV) - (II \times III) + (II \times IV), \quad (\text{C.5})$$

onde oculta-se o fator e o somatório. Os produtos serão

$$\begin{aligned} I \times III &= \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma^\lambda u(p'_2) \bar{u}(p_1) \gamma^\sigma u(p'_1) \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^{k*} \\ I \times IV &= \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma^\lambda u(p'_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\sigma u(p'_2) \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*} \\ II \times III &= \bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma^\lambda u(p'_2) \bar{u}(p_1) \gamma^\sigma u(p'_1) \Delta_{\mu\nu}^{k'} \Delta_{\sigma\lambda}^{k*} \\ II \times IV &= \bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_1) \gamma^\nu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma^\lambda u(p'_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\sigma u(p'_2) \Delta_{\mu\nu}^{k'} \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*}. \end{aligned}$$

Explicitamos o somatório nas polarizações do segundo termo, por exemplo:

$$\begin{aligned} I \times IV &= \sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \\ \epsilon'_1, \epsilon'_2}} \bar{u}(\epsilon'_1) \gamma^\mu u(\epsilon_1) \bar{u}(\epsilon'_2) \gamma^\nu u(\epsilon_2) \bar{u}(\epsilon_2) \gamma^\lambda u(\epsilon'_1) \bar{u}(\epsilon_1) \gamma^\sigma u(\epsilon'_2) \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

onde a variável fica implícita na forma

$$\begin{aligned}
u^{(\epsilon_1)} &\equiv u^{(\epsilon_1)}(p_1) \\
u^{(\epsilon'_1)} &\equiv u^{(\epsilon'_1)}(p'_1) \\
u^{(\epsilon_2)} &\equiv u^{(\epsilon_2)}(p_2) \\
u^{(\epsilon'_2)} &\equiv u^{(\epsilon'_2)}(p'_2)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Escrevemos as quantidades em termos dos índices matriciais, representados por letras latinas - lembrando que índices gregos são índices de Lorentz e a letra k representa os momentos.

$$\sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \\ \epsilon'_1, \epsilon'_2}} -\bar{u}_{hi}^{(\epsilon'_1)} \gamma_{ij}^\mu u_{jg}^{(\epsilon_1)} \bar{u}_{gl}^{(\epsilon'_2)} \gamma_{lm}^\nu u_{mn}^{(\epsilon_2)} \bar{u}_{np}^{(\epsilon_2)} \gamma_{pq}^\lambda u_{qr}^{(\epsilon'_1)} \bar{u}_{rs}^{(\epsilon_1)} \gamma_{st}^\sigma u_{tx}^{(\epsilon'_2)} \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*}, \tag{C.8}$$

onde o somatório no sub índices está implícita. Agora apenas organizamos na forma

$$\sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \\ \epsilon'_1, \epsilon'_2}} u_{qr}^{(\epsilon'_1)} \bar{u}_{hi}^{(\epsilon'_1)} \gamma_{ij}^\mu u_{tx}^{(\epsilon'_2)} \bar{u}_{gl}^{(\epsilon'_2)} \gamma_{lm}^\nu u_{mn}^{(\epsilon_2)} \bar{u}_{np}^{(\epsilon_2)} \gamma_{pq}^\lambda u_{jg}^{(\epsilon_1)} \bar{u}_{rs}^{(\epsilon_1)} \gamma_{st}^\sigma \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*} \tag{C.9}$$

onde a soma sobre os índices latinos fica oculta. Lembre-se que as matrizes são spinores, ou seja: $u_{ij} = \gamma^0 \bar{u}_{ji}^*$, com $j = 1$ ou simplesmente $\bar{u}_{ij} = u_{ij}^\dagger \gamma^0 = u_{ji}^* \gamma^0$, com $j = 1$, pois u é sempre uma matriz linha ou coluna. Logo

$$\begin{aligned}
I \times IV &= \left[u_{q1}^{(\epsilon'_1)} \bar{u}_{1i}^{(\epsilon'_1)} \right] \gamma_{ij}^\mu \left[u_{t1}^{(\epsilon'_2)} \bar{u}_{1l}^{(\epsilon'_2)} \right] \gamma_{lm}^\nu \\
&\times \left[u_{m1}^{(\epsilon_2)} \bar{u}_{1p}^{(\epsilon_2)} \right] \gamma_{pq}^\lambda \left[u_{j1}^{(\epsilon_1)} \bar{u}_{1s}^{(\epsilon_1)} \right] \gamma_{st}^\sigma \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*}
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Usando o resultado do apêndice E este resultado resume-se ao cálculo de traços de matrizes Dirac:

$$\begin{aligned}
I \times IV &= \frac{(\not{p}'_2 + M)_{tl} \gamma_{lm}^\nu}{2M} \frac{(\not{p}_2 + M)_{mp} \gamma_{pq}^\lambda}{2M} \\
&\times \frac{(\not{p}'_1 + M)_{qi} \gamma_{ij}^\mu}{2M} \frac{(\not{p}_1 + M)_{js} \gamma_{st}^\sigma \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^{k'}}{2m} \\
&= \frac{1}{16M^4} Tr \left[(\not{p}'_2 + M) \gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\lambda \right. \\
&\times \left. (\not{p}'_1 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma \right] \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^{k'}. \tag{C.11}
\end{aligned}$$

onde o traço é igual a

$$\begin{aligned}
&Tr \left[\not{p}'_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\sigma \not{p}'_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\lambda \right] + M^2 Tr \left[\not{p}'_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda \right] \\
&+ M^2 Tr \left[\not{p}'_1 \gamma^\mu \gamma^\sigma \not{p}'_2 \gamma^\nu \gamma^\lambda \right] + M^2 Tr \left[\not{p}'_1 \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\lambda \right] \\
&+ M^2 Tr \left[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\sigma \not{p}'_2 \gamma^\nu \gamma^\lambda \right] + M^2 Tr \left[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\sigma \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\lambda \right] \\
&+ M^2 Tr \left[\gamma^\mu \gamma^\sigma \not{p}'_2 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma^\lambda \right] + M^4 Tr \left[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda \right], \tag{C.12}
\end{aligned}$$

que, ao expandir os termos, toma a forma

$$\begin{aligned}
&(p'_1)_\chi (p_1)_\xi (p'_2)_\rho (p_2)_\eta Tr \left[\gamma^\chi \gamma^\mu \gamma^\xi \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\eta \gamma^\lambda \right] \\
&+ (p'_1)_\chi (p_1)_\xi M^2 Tr \left[\gamma^\chi \gamma^\mu \gamma^\xi \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda \right] \\
&+ (p'_1)_\chi (p'_2)_\rho M^2 Tr \left[\gamma^\chi \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \right] \\
&+ (p'_1)_\chi (p_2)_\eta M^2 Tr \left[\gamma^\chi \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\eta \gamma^\lambda \right] \\
&+ (p_1)_\xi (p'_2)_\rho M^2 Tr \left[\gamma^\mu \gamma^\xi \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \right] \\
&+ (p_1)_\xi (p_2)_\eta M^2 Tr \left[\gamma^\mu \gamma^\xi \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\eta \gamma^\lambda \right] \\
&+ (p'_2)_\rho (p_2)_\eta M^2 Tr \left[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\eta \gamma^\lambda \right] \\
&+ M^4 Tr \left[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda \right] \tag{C.13}
\end{aligned}$$

onde os traços do tipo $Tr [\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_j}] = 0$ para $j = 2i + 1$ com $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, já foram omitidos desse resultado.

Da mesma forma procedemos com o primeiro produto

$$\begin{aligned}
I \times III &= \frac{(\not{p}'_1 + M)_{ij}}{2M} \gamma_{jm}^\mu \frac{(\not{p}_1 + M)_{mp}}{2M} \gamma_{pi}^\sigma \\
&\times \frac{(\not{p}'_2 + M)_{qr}}{2M} \gamma_{rs}^\nu \frac{(\not{p}_2 + M)_{st}}{2M} \gamma_{tq}^\lambda \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^k \\
&= \frac{1}{16M^4} Tr [(\not{p}'_1 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma] \\
&\times Tr [(\not{p}'_2 + M) \gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\lambda] \Delta_{\mu\nu}^k \Delta_{\sigma\lambda}^k.
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Neste caso o somatório nos leva ao produto de dois traços, onde cada um pode ser transcrito na forma

$$\begin{aligned}
Tr [(\not{p}'_1 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma] &= Tr [(\not{p}'_1 \gamma^\mu + M \gamma^\mu) (\not{p}_1 \gamma^\sigma + M \gamma^\sigma)] \\
&= Tr [(p_1)_\eta (p'_1)_\rho \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\eta \gamma^\sigma + M (p'_1)_\rho \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \\
&\quad + M (p_1)_\eta \gamma^\eta \gamma^\mu \gamma^\sigma + M^2 \gamma^\mu \gamma^\sigma]
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Devido a simetria na troca $p'_1 \leftrightarrow p'_2$ e $k \leftrightarrow k'$, teremos os outros dois traços escritos como

$$\begin{aligned}
II \times III &= \frac{1}{16M^4} Tr [(\not{p}'_1 + M) \gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\lambda \\
&\times (\not{p}'_2 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma] \Delta_{\mu\nu}^{k'} \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*},
\end{aligned} \tag{C.16}$$

e

$$\begin{aligned}
II \times IV &= \frac{1}{16M^4} Tr [(\not{p}'_2 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma] \\
&\times Tr [(\not{p}'_1 + M) \gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\lambda] \Delta_{\mu\nu}^{k'} \Delta_{\sigma\lambda}^{k'*}.
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Em termos dos traços teremos o seguinte resultado para a amplitude não-polarizada

$$\begin{aligned}
|\tau|_{np}^2 &= \frac{1}{16M^4} Tr [(\not{p}'_1 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma] \\
&\times Tr [(\not{p}'_2 + M) \gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\lambda] \Delta_{\mu\nu}(k) \Delta_{\sigma\lambda}^*(k) \\
&- \frac{1}{16M^4} Tr [(\not{p}'_2 + M) \gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\lambda \\
&\quad (\not{p}'_1 + M) \gamma^\mu (\not{p}_1 + M) \gamma^\sigma] \Delta_{\mu\nu}(k) \Delta_{\sigma\lambda}^*(k') \\
&+ (p'_1 \leftrightarrow p'_2), \tag{C.18}
\end{aligned}$$

Resolvendo os traços obtidos nas equações C.13 e C.15, e aqueles cujos termos diferem apenas pela troca de $p'_1 \longleftrightarrow p'_2$ e $k' \longleftrightarrow k$, obtem-se produtos de momentos. Seguindo as considerações da seção 2.4, como os resultados das equações 2.41 e 2.42, depois de algumas simplificações chegamos ao resultado

$$\begin{aligned}
|\tau|_{np}^2 &= \frac{1}{2M^4} \left\{ \frac{2(p_1 \cdot p_2)^2 - 4M^2 p_1 \cdot p_2}{(p_1 - p'_2)^2 (p_1 - p'_1)^2} \right. \\
&+ \frac{2M^2(p_1 \cdot p'_1 - p_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p'_1)^2}{[(p_1 - p'_2)^2]^2} \\
&+ \left. \frac{2M^2(p_1 \cdot p'_2 - p_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p'_2)^2}{[(p_1 - p'_1)^2]^2} \right\}. \tag{C.19}
\end{aligned}$$

D PRODUTOS DE MOMENTOS

Como definidos nos gráficos de Feynman das figura 2.5 teremos os seguintes momentos internos:

$$\begin{aligned}k &= p_1 - p'_1 \\ k' &= p_1 - p'_2\end{aligned}$$

De acordo com nossa escolha do sistema de referência, no centro de massa, como mostrado na figura B.1 teremos a conservação dos momentos totais

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad (\text{D.1})$$

que nos leva às seguintes equivalências entre produtos escalares:

$$\begin{aligned}p_1 \cdot p_2 &= p'_1 \cdot p'_2 \\ p_1 \cdot p'_2 &= p'_1 \cdot p_2 \\ p_1 \cdot p'_1 &= p_2 \cdot p'_2\end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

A conservação do momento implica nas igualdades

$$E_{p_1} = E_{p_2} = E$$

$$E_i = E_1 + E_2 = E$$

$$p = \sqrt{E^2 - m^2}$$

Os produtos de momentos podem ser traduzidos como:

$$\begin{aligned}
 p_1 \cdot p_2 &= (p_1)_0 (p_2)^0 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos(180^\circ) \\
 &= E_1 E_2 + (E^2 - M^2) \\
 &= 2E^2 - M^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 \cdot p'_1 &= (p_1)_0 (p'_1)^0 - |\vec{p}_1| |\vec{p}'_1| \cos \theta \\
 &= E^2 - |\vec{p}_1| \cos \theta \\
 &= E^2 - E^2 \cos \theta + M^2 \cos \theta \\
 &= E^2 (1 - \cos \theta) + M^2 \cos \theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 \cdot p'_2 &= (p_1)_0 (p'_2)^0 - |\vec{p}_1| |\vec{p}'_2| \cos(\theta + 180^\circ) \\
 &= E^2 + (E^2 - M^2) \cos \theta \\
 &= E^2 (1 + \cos \theta) - M^2 \cos \theta,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 p'_1 \cdot p'_1 &= (p'_1)_0 (p'_1)^0 - |\vec{p}'_1| |\vec{p}'_1| \cos(0) \\
 &= E^2 - (E^2 - M^2) \\
 &= M^2
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

E OPERADORES DE PROJEÇÃO

Escrita assim, as funções, sob o somatório da polarização, representam um operador projeção, ou seja:

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \sum_r u_\alpha^{(r)} \bar{u}_\beta^{(r)}. \quad (\text{E.1})$$

Identificamos

$$u^{(r)}(p) = C \begin{pmatrix} (M + E_p) \eta^{(r)} \\ (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \eta^{(r)} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

e $\bar{u}^{(r)}(p) = [u^{(r)}(p)^*]^T \gamma^0$. A solução para C pode ser construída usando o resultado 2.13:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(r)}(p) u^{(s)}(p) &= |C|^2 \bar{u}^{(r)}(0) (M + \not{p}) (M + \not{p}) u^{(s)}(0) \\ &= 2M |C|^2 \bar{u}^{(r)}(0) (M + \not{p}) u^{(s)}(0) \\ &= 2M |C|^2 \bar{u}^{(r)}(0) (M + p^0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}) u^{(s)}(0) \\ &= 2M |C|^2 (M + E_p) \bar{u}^{(r)}(0) u^{(s)}(0) \\ &= 2M |C|^2 (M + E_p) \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Escolhemos, então, a fase de C para que, em $\vec{p} = 0$, os espinores estejam de acordo com as equações 2.10

A solução mostrada na equação 2.6 pode ser escrita como:

$$u^{(r)}(p) = C (\not{p} + M) u^{(r)}(0). \quad (\text{E.4})$$

A equação E.1 fica na forma

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2M(M + E_p)} \sum_r [(\not{p} + M) u^{(r)}(0) \bar{u}^{(r)}(0) (\not{p} + M)]_{\alpha\beta} \quad (\text{E.5})$$

onde

$$\begin{aligned}
\sum_r u^{(r)}(0) \bar{u}^{(r)}(0) &= \begin{pmatrix} \eta^{(r)} \eta^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0 \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{I + \gamma^0}{2}.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Assim

$$\begin{aligned}
(\Lambda_+)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2M(M+E_p)} \left[M(\not{p} + M) + \frac{1}{2}(\not{p} + M) \left((\not{p} + M) \gamma^0 + 2E_p \right) \right]_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2M} (\not{p} + M)_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Da mesma forma, definimos

$$\begin{aligned}
(\Lambda_-)_{\alpha\beta} &= \sum_r v_\alpha^{(r)} \bar{v}_\beta^{(r)} \\
&= -\frac{1}{2M} (\not{p} - M)_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Estes operadores de projeção satisfazem as seguintes propriedades

$$\Lambda_+^2 = \Lambda_+, \quad \Lambda_-^2 = \Lambda_-, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0 \tag{E.9}$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = I. \tag{E.10}$$

F VÉRTICES

Definiremos o fator de vértice no espaço dos momentos como:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu_1\nu_1\dots\mu_m} &= +i \int d^4x d^4x_1 \dots d^4x_n d^4y_1 \dots d^4y_m \\
&\times e^{i[p_1x_1 + \dots + p_nx_n + q_1y_1 + \dots + q_my_m]} \\
&\times \frac{\delta}{\delta\psi_1(x_1)} \times \dots \times \frac{\delta}{\delta\psi_n(x_n)} \times \frac{\delta}{\delta A_1^{\mu_1}(x_1)} \times \dots \\
&\times \dots \frac{\delta}{\delta A_1^{\mu_m}(x_m)} \mathcal{L}_{interaction}(\psi_1, \dots, \psi_n, A_1, \dots, A_m)(x), \quad (\text{F.1})
\end{aligned}$$

onde ψ_1, \dots, ψ_n são os campos fermiônicos e $A_1^{\mu_1}, \dots, A_m^{\mu_m}$ são os campos eletromagnéticos. As variáveis p_1, \dots, p_n e os q_1, \dots, q_m são os momentos de entrada e saída dos campos fermiônicos e eletromagnéticos, respectivamente. O fator de vértice no espaço dos momentos será associado com uma função delta expressando a conservação do momento no vértice de interação. No entanto, nós normalmente omitimos a função delta global ao invés de expressar a conservação de momento em momentos de entrada e saída do vértice (BJERRUM-BOHR, 2003.).

Como demonstração do cálculo usaremos a densidade de lagrangiana da Teoria Dualizada mostrada na equação 3.35, ou seja

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= \bar{\psi} \frac{e}{m^2} \left\{ \left[-\delta_\kappa^\mu \partial_\xi \partial^\xi - \rho \delta_\kappa^\mu b^\xi b_\alpha \partial_\xi \partial^\alpha - \rho b^\mu b_\kappa \partial_\xi \partial^\xi \right] A^\kappa \right. \\
&\quad \left. - \left[-\partial_\lambda \partial^\mu - \rho b^\xi b_\lambda \partial_\xi \partial^\mu - \rho b^\mu b_\alpha \partial_\lambda \partial^\alpha \right] A^\lambda \right\} \gamma^\nu \psi L_{\mu\nu} \quad (\text{F.2})
\end{aligned}$$

Logo, quando, a inserimos na equação F.1, teremos

$$\begin{aligned}
\Gamma_\chi &= +i \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x e^{i[px_1 - p'x_2 + qx_3]} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)} \frac{\delta}{\delta\psi(x_2)} \frac{\delta}{\delta A^\chi(x_3)} \\
&\times \bar{\psi} \frac{e}{m^2} \left[\left(-\delta_\kappa^\mu \partial_\xi \partial^\xi - \rho \delta_\kappa^\mu b^\xi b_\alpha \partial_\xi \partial^\alpha - \rho b^\mu b_\kappa \partial_\xi \partial^\xi \right) A^\kappa \right. \\
&\quad \left. - \left(-\partial_\lambda \partial^\mu - \rho b^\xi b_\lambda \partial_\xi \partial^\mu - \rho b^\mu b_\alpha \partial_\lambda \partial^\alpha \right) A^\lambda \right] \gamma^\nu \psi L_{\mu\nu}, \quad (\text{F.3})
\end{aligned}$$

onde q é o momento do Fóton. Fazendo a derivada funcional das quantidades entre chaves, teremos

$$\begin{aligned} \Gamma_\chi &= +i \int d^4x_3 d^4x e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \\ &\times \frac{e}{m^2} \delta(x - x_1) \left\{ \left(-\delta_\kappa^\mu \partial_\xi \partial^\xi - \rho \delta_\kappa^\mu b^\xi b_\alpha \partial_\xi \partial^\alpha - \rho b^\mu b_\kappa \partial_\xi \partial^\xi \right) \delta(x - x_3) \delta_\chi^\kappa \right. \\ &- \left. \left(-\partial_\lambda \partial^\mu - \rho b^\xi b_\lambda \partial_\xi \partial^\mu - \rho b^\mu b_\alpha \partial_\lambda \partial^\alpha \right) \delta(x - x_3) \delta_\chi^\lambda \right\} \delta(x - x_2) \gamma^\nu L_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Pela expansão de Fourier a função delta pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Gamma_\chi &= +i \int d^4x d^4x_3 e^{i[p x - p' x + q x_3]} \left\{ \frac{e}{m^2} \left[\left(-\delta_\chi^\mu \partial_\xi \partial^\xi - \rho \delta_\chi^\mu b^\xi b_\alpha \partial_\xi \partial^\alpha \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \rho b^\mu b_\chi \partial_\xi \partial^\xi \right) \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3(x-x_3)} - \left(-\partial_\lambda \partial^\mu - \rho b^\xi b_\lambda \partial_\xi \partial^\mu \right. \right. \\ &- \left. \left. \rho b^\mu b_\alpha \partial_\lambda \partial^\alpha \right) \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3(x-x_3)} \delta_\chi^\lambda \right] \gamma^\nu L_{\mu\nu} \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\chi &= +i \int d^4x d^4x_3 e^{i[p x - p' x + q x_3]} \\ &\times \left\{ \frac{e}{m^2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \left[-\delta_\chi^\mu \partial_\xi \partial^\xi \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3(x-x_3)} \right. \right. \\ &- \left. \left. \rho \delta_\chi^\mu b^\xi b_\alpha \partial_\xi \partial^\alpha \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3(x-x_3)} - \rho b^\mu b_\chi \partial_\xi \partial^\xi \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3(x-x_3)} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \partial_\lambda \partial^\mu \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3(x-x_3)} \delta_\chi^\lambda + \rho b^\xi b_\lambda \partial_\xi \partial^\mu \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3(x-x_3)} \delta_\chi^\lambda \right. \right. \\ &+ \left. \left. \rho b^\mu b_\alpha \partial_\lambda \partial^\alpha \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_3(x-x_3)} \delta_\chi^\lambda \right] \gamma^\nu L_{\mu\nu} \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Satisfeita a comutatividade entre as derivadas e a operação de integração, operamos com a derivada sobre o integrando

$$\begin{aligned}
\Gamma_\chi &= -i \int d^4x d^4x_3 \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} e^{i[(q+p_3)x_3 + (p_3+p-p')x]} \\
&\times \left\{ \frac{e}{m^2} \left[-\delta_\chi^\mu p_{3\xi} p_3^\xi - \rho \delta_\chi^\mu b^\xi b_\alpha p_3^\alpha p_{3\xi} - \rho b^\mu b_\chi p_{3\xi} p_3^\xi \right. \right. \\
&+ \left. \left. p_{3\lambda} p_3^\mu \delta_\chi^\lambda + \rho b^\xi b_\lambda p_{3\xi} p_3^\mu \delta_\chi^\lambda + \rho b^\mu b_\alpha p_{3\lambda} p_3^\alpha \delta_\chi^\lambda \right] \gamma^\nu L_{\mu\nu} \right\} \quad (\text{F.7})
\end{aligned}$$

logo teremos

$$\begin{aligned}
\Gamma_\chi &= -i \int d^4x \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \delta(q+p_3) e^{i(p_3+p-p')x} \\
&\times \left\{ \frac{e}{m^2} \left[-\delta_\chi^\mu p_3 \cdot p_3 - \rho \delta_\chi^\mu (b \cdot p_3) (b \cdot p_3) - \rho b^\mu b_\chi p_3 \cdot p_3 \right. \right. \\
&+ \left. \left. p_{3\lambda} p_3^\mu \delta_\chi^\lambda + \rho b^\xi b_\lambda p_{3\xi} p_3^\mu \delta_\chi^\lambda + \rho b^\mu (b \cdot p_3) p_{3\lambda} \delta_\chi^\lambda \right] \gamma^\nu L_{\mu\nu} \right\} \quad (\text{F.8})
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\Gamma_\chi &= -i \int d^4x e^{i(q+p-p')x} \\
&\times \left\{ \frac{e}{m^2} \left[-\delta_\chi^\mu q \cdot q - \rho \delta_\chi^\mu (b \cdot q) (b \cdot q) - \rho b^\mu b_\chi q \cdot q \right. \right. \\
&+ \left. \left. q_\lambda q^\mu \delta_\chi^\lambda + \rho b^\xi b_\lambda q_\xi q^\mu \delta_\chi^\lambda + \rho b^\mu (b \cdot q) q_\lambda \delta_\chi^\lambda \right] \gamma^\nu L_{\mu\nu} \right\} \quad (\text{F.9})
\end{aligned}$$

Integrando sobre o momento p_3 removemos o restante das funções delta. Finalmente, integrando sobre x

$$\begin{aligned}
\Gamma_\chi &= -i (2\pi)^4 \delta(q+p-p') \left\{ \frac{e}{m^2} \left[-q^2 \delta_\chi^\mu - \rho (b \cdot q)^2 \delta_\chi^\mu - \rho q^2 b^\mu b_\chi \right. \right. \\
&+ \left. \left. q^\mu q_\chi + \rho (b \cdot q) b_\chi q^\mu + \rho (b \cdot q) b^\mu q_\chi \right] \gamma^\nu L_{\mu\nu} \right\} \quad (\text{F.10})
\end{aligned}$$

onde, para o cálculo de amplitudes, consideramos como vértice apenas a parte

$$\begin{aligned}\Gamma_\chi &= -i \left[-q^2 L_{\chi\nu} + q^\mu q_\chi L_{\mu\nu} \right] \gamma^\nu - i \frac{e}{m^2} \rho \left[-(b \cdot q)^2 L_{\chi\nu} \right. \\ &\quad \left. + (b \cdot q) (b_\chi q^\mu + b^\mu q_\chi) L_{\mu\nu} - q^2 b^\mu b_\chi L_{\mu\nu} \right] \gamma^\nu\end{aligned}\quad (\text{F.11})$$

onde q é o momento do fóton.

Podemos introduzir uma regra que resumirá cálculos de vértices do mesmo tipo. A partir da equação 4.4, ou seja

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu &= \gamma^\beta \left\{ g^{\mu\alpha} \left[\square + \rho (b \cdot \partial)^2 \right] + \rho b^\alpha b^\mu \square \right. \\ &\quad \left. - \partial^\mu \partial^\alpha - \rho (b \cdot \partial) (b^\mu \partial^\alpha + b^\alpha \partial^\mu) \right\} L_{\alpha\beta},\end{aligned}\quad (\text{F.12})$$

podemos substituir cada derivada parcial por um fator $(-iq)$ e obter, de forma simples, a equação F.11 que, escrita de forma semelhante a essa é

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu &= -i \gamma^\beta \left\{ g^{\mu\alpha} \left[-q^2 - \rho (b \cdot q)^2 \right] - \rho b^\alpha b^\mu q^2 \right. \\ &\quad \left. + q^\mu q^\alpha + \rho (b \cdot q) (b^\mu q^\alpha + b^\alpha q^\mu) \right\} L_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (\text{F.13})$$